



非局部弹性理论下P波在弹性介质和饱和多孔介质分界面上的透反射问题研究

王廷伟, 李强, 马强, 周凤玺

Transmission and reflection of P wave on the interface between elastic medium and saturated porous medium under nonlocal elastic theory

WANG Tingwei, LI Qiang, MA Qiang, and ZHOU Fengxi

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202410033>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非均匀多孔介质等效渗透率的普适表达式

A universal expression of the equivalent permeability of heterogeneous porous media

张东, 刘晓丽, 王恩志 水文地质工程地质. 2020, 47(4): 35–42

多孔介质界面对重非水相液体迁移过程影响的图像法研究

Investigation on the influence of porous media interface on DNAPL migration based on image methods

刘汉乐, 郝胜瑶, 马建初 水文地质工程地质. 2019, 46(5): 169–174

井内嵌入同轴多孔与固体圆柱地下水渗流流型分析

Flow pattern analysis around a solid cylinder with both porous and water rings in porous media

朱琳, 雷海燕, 马非, 戴传山 水文地质工程地质. 2021, 48(4): 25–31

一种基于弹性能释放率的岩石新型统计损伤本构模型

A statistical damage constitutive rock model based on elastic energy release rate

刘文博, 孙博一, 陈雷, 张树光 水文地质工程地质. 2021, 48(1): 88–95

基于尖点突变理论的软岩弃渣路堤局部稳定性分析

An analysis of local stability of soft rock cinder embankment based on the cusp catastrophe theory

鞠兴华, 杨晓华, 张莎莎 水文地质工程地质. 2019, 46(6): 112–118

非饱和花岗岩残积土水-气两相驱替过程数值模拟

Numerical simulation of water-gas two-phase displacement process in unsaturated granite residual soil

蔡沛辰, 阚云, 李显 水文地质工程地质. 2021, 48(6): 54–63



关注微信公众号，获得更多资讯信息

DOI: [10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202410033](https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202410033)

王廷伟, 李强, 马强, 等. 非局部弹性理论下 P 波在弹性介质和饱和多孔介质分界面上的透反射问题研究 [J]. 水文地质工程地质, 2025, 52(3): 102-112.

WANG Tingwei, LI Qiang, MA Qiang, et al. Transmission and reflection of P wave on the interface between elastic medium and saturated porous medium under nonlocal elastic theory[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2025, 52(3): 102-112.

非局部弹性理论下 P 波在弹性介质和饱和多孔介质分界面上的透反射问题研究

王廷伟¹, 李 强¹, 马 强², 周凤玺³

(1. 甘肃城市发展城市建设运营集团有限公司, 甘肃兰州 730010; 2. 青海大学土木水利学院,
青海西宁 810016; 3. 兰州理工大学土木工程学院, 甘肃兰州 730050)

摘要: 在工程领域, 准确预测波在不同介质中的传播特性对于结构设计和材料性能评估至关重要。经典弹性理论在描述波传播以及处理高频波和多孔介质时存在局限性。为了弥补这一不足, 基于非局部弹性理论, 探究了 P 波在弹性介质和饱和多孔介质分界面上的透反射问题。基于非局部介质理论和 Helmholtz 矢量分解原理, 建立了弹性波在层间界面透反射的数学模型, 通过数值算例验证了该模型的正确性, 并分析了非局部弹性理论下入射频率、入射角度、单一非局部参数、层间非局部参数对分界面处波的透反射振幅比的影响规律。研究结果表明: (1)随着入射波频率的增加, 两种理论下的振幅比差异逐渐增大, 当频率较高时这种差异性表现尤为显著; (2)在两种理论下, 随着角度的增加, 反射 P1 波的振幅比受角度变化的影响最小, 其余波型波受角度变化的影响程度相似, 其中振幅比最大差异达 33%; (3)分界面处波的透反射规律受到非局部参数的调控, 弹性介质非局部参数的变化对透射波的振幅比的影响极为微弱。研究成果对于深入理解波在不同介质界面的传播行为具有重要意义, 可为复合材料设计、波传播预测及环境振动分析提供理论支撑。

关键词: 非局部弹性理论; 多孔介质; 弹性波; 透反射; 振幅比

中图分类号: TU435

文献标志码: A

文章编号: 1000-3665(2025)03-0102-11

Transmission and reflection of P wave on the interface between elastic medium and saturated porous medium under nonlocal elastic theory

WANG Tingwei¹, LI Qiang¹, MA Qiang², ZHOU Fengxi³

(1. Gansu New Development City Development Construction Operation Group Co. Ltd., Lanzhou, Gansu 730010, China; 2. School of Civil Engineering and Water Resources, Qinghai University, Xining, Qinghai 810016, China; 3. School of Civil Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou, Gansu 730050, China)

Abstract: Accurate prediction of wave propagation properties in different media is essential for structural design and material performance evaluation in engineering. Classical elasticity theory has limitations in describing wave

收稿日期: 2024-10-22; 修訂日期: 2025-01-17 投稿网址: www.swdzgcdz.com

基金项目: 青海省自然科学基金项目(2021-ZJ-943Q)

第一作者: 王廷伟(1976—), 男, 本科, 高级工程师, 主要从事土动力学方面的研究。E-mail: 498414242@qq.com

通讯作者: 李强(1989—), 男, 本科, 高级工程师, 主要从事土动力学方面的研究。E-mail: 793447508@qq.com

propagation, particularly when dealing with high-frequency waves and porous media. To address these shortcomings, this study investigated the transmission and reflection of P-waves on the dividing surface of elastic and saturated porous media based on the nonlocal elasticity theory. Based on the nonlocal medium theory and Helmholtz vector decomposition principle, a mathematical model of elastic wave transmission and reflection at the interlayer interface was established, and the correctness of the model was verified by numerical examples. The effects of incident frequency, incident angle, single nonlocal parameter, and interlayer nonlocal parameter on the amplitude ratio of wave transmission and reflection at the interface are analyzed under the nonlocal elastic theory. The results show that the difference between the amplitude ratios under the two theories gradually increases with the increase of the incident wave frequency, becoming particularly pronounced at higher frequencies. The amplitude ratio of the reflected P1 wave presents the least sensitivity to variations in incident angle under both theories, whereas the other wave types demonstrate comparable angular dependencies, with the maximum observed amplitude ratio difference reaching 33%. It is worth noting that the transmission and reflection patterns of waves at the interfaces are regulated by nonlocal parameters, and changes in the nonlocal parameters of the elastic medium have an extremely weak effect on the amplitude ratio of the transmitted waves. The findings of this study are of significance for the in-depth understanding of wave propagation behavior at the interfaces of different media, and provide new theoretical support and analytical tools for engineering applications such as composite material design, wave propagation prediction, and environmental vibration analysis.

Keywords: nonlocal elasticity theory; porous media; elastic wave; transparent reflection; amplitude ratio

波动理论在岩土工程和复合材料等方面应用广泛,特别是在地震工程^[1-2]、地基动力学^[3-4]和近场动力学^[5-6]等领域。传统的弹性波动理论假设介质是连续且均匀的,并且采用局部理论描述波的传播,即认为介质中某一点的应力仅与该点的应变有关^[7-9]。然而,实际介质往往表现出非局部特性,即一点的响应可能受到其邻近点的影响。非局部弹性理论考虑了这种内部长度尺度的影响^[10-12],为更准确地描述波在真实介质中的传播提供了理论框架。

在以往的研究中,针对饱和土中弹性波传播规律的研究主要依赖于经典的 Biot 理论^[13-14]。该理论的构建基础是假设波长显著超过饱和土孔隙的尺寸。现有文献和试验研究结果显示^[15-16],在高频条件下,这一假设不再有效。此时,孔隙尺寸对波传播的特性具有决定性影响。再者,波动传播过程中会引起土颗粒的运动,从而产生孔隙动应力,这种应力会随着输入频率的增加而增大。但是 Biot 理论在建模时将孔隙尺寸视作固定常数,未能考虑到孔隙尺寸变化和孔隙动应力对波传播特性的影响。

为了解决上述问题, Tong 等^[17]将非局部参数引入并且忽略流体的非局部效应,建立了非局部两相饱和多孔介质的波动方程。基于上述非局部弹性理论下的波动方程,王宁等^[18]、丁海滨等^[19]、王观阳等^[20]对非局部理论下饱和土地基的动力响应问题进行了研究,

以上研究均表明非局部参数对饱和土地基的应力以及位移有显著影响,非局部弹性理论和局部弹性理论下饱和土的动力响应具有显著差异性。随后,徐长节等^[21]、Xu 等^[22]、Ding 等^[23]将问题拓展到非局部理论下饱和土中衬砌等地下结构对波的散射问题上,结果表明非局部参数对衬砌动应力集中因子的影响与入射波频率有关,高频下影响较为明显。为了进一步对非局部弹性理论下饱和多孔介质中波的传播特性进行研究, Tong 等^[24]提出了一种基于非局部饱和多孔介质理论 Reyleigh 波传播的模型,结果仍然显示随着响应频率的增加,非局部尺度效应对瑞利波速度和位移场的影响越来越强。通过上述文献可知非局部理论下和局部理论下波的传播特性具有显著差异,且这种差异性在高频时更为明显。

在岩土工程实践中,地震波常常遇到不同介质的分界面,以往对弹性波在交界面上的透反射问题研究主要集中在如饱和多孔介质^[25-26]、非饱和多孔介质^[27-28]、饱和冻土介质^[29-30]与单相弹性介质之间的交界面处。研究弹性波在不同介质交界面上波的透反射特性是岩土工程领域极为重要的一个分支,但是以往的研究大都基于经典弹性理论,即基于局部应力-应变关系,而非局部弹性理论下分界面上波的透反射研究鲜有报道。

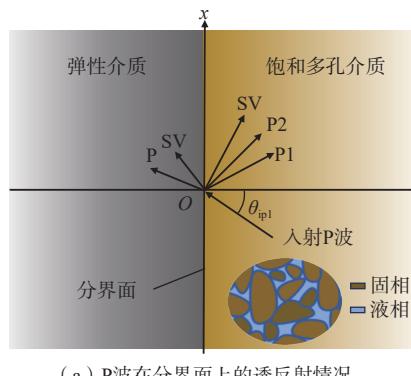
因此,非局部理论下弹性波在饱和多孔介质和弹

性介质分界面上的透反射问题亟待开展。本文基于非局部弹性理论,建立了P波在弹性介质和饱和多孔介质分界面处透反射振幅比的关系式,旨在深入探讨非局部弹性理论下P波在弹性介质与饱和多孔介质分界面上的透反射问题。研究不同入射条件下P波的反射和透射系数,以及非局部参数对波传播特性的影响规律,以期对岩土工程、复合材料、地震工程等领域提供相应的技术支持。

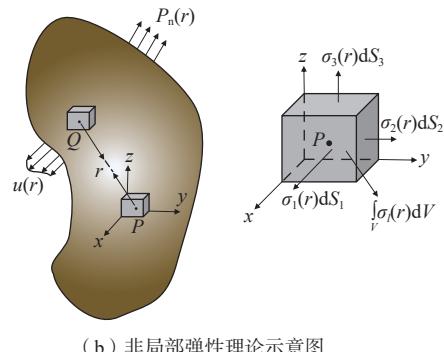
1 控制方程

1.1 问题的数学模型

考虑P波以 θ_{ip1} 的入射角度从饱和多孔介质入射到弹性介质分界面处,波的透反射模型如图1(a)所示。饱和多孔介质中会产生反射P1波、反射P2波、反射SV波,弹性介质中会产生透射P波和透射SV波。根据非局部弹性理论,若影响P点应力的应变场区域半径为r,则P点受到以P为圆心,r为半径范围内所有质点对其作用,如图1(b)所示。



(a) P波在分界面上的透反射情况



(b) 非局部弹性理论示意图

图1 非局部理论下P波在介质分界面上透反射数学模型

Fig. 1 Mathematical model of P wave transmission and reflection on the interface of medium under nonlocal theory

注: (b)图中 $P_n(r)$ 为场区域内的应力; $u(r)$ 为场区域内的位移; r 为以P点为圆心、影响P点应力场区域内的半径; $\sigma_1 dS_1$ 、 $\sigma_2 dS_2$ 、 $\sigma_3 dS_3$ 分别为

单元体x、y、z方向上的微内力; $\int_V \sigma_i dV$ 为总力。

1.2 非局部弹性介质理论

为了考虑土体中任意点周围整个区域内其它点对该点处应力的影响,运用Eringen提出的非局部理论^[10-11]来描述土体的力学特性,假定场地土为均质线弹各向同性介质,在动力情况下,不计体力时的基本方程为:

$$\sigma_{ij,j}^e = \rho_e \ddot{u}_i^e \quad (1)$$

$$\sigma_{ij}^e(\mathbf{r}) = \int_V \chi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \tau) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dV(\mathbf{r}') \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} (u_{i,j}^e + u_{j,i}^e) \quad (3)$$

式中: σ_{ij}^e ——非局部理论下弹性介质的非局部应力张量 σ^e 的分量/Pa;

ε_{ij}^e ——弹性介质的应变张量 ε^e 的分量;

u_i^e ——弹性介质的位移张量 u^e 的分量/m;

C_{ijkl} ——四阶弹性张量 C 的分量;

ρ_e ——弹性介质的密度/(kg·m⁻³);

$\chi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \tau)$ ——非局部模量;

\mathbf{r} ——位移张量/m;

$\tau = e_0 a$ ——非局部核函数;

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ——欧式距离/m。

Eringen给出了式(2)的微分形式为:

$$(1 - \tau_e^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{eL} \quad (4)$$

式中: σ_{ij}^{eL} ——经典弹性理论下弹性介质的局部应力张量/Pa;

τ_e ——弹性介质的非局部参数。

结合式(1)和式(4)可得:

$$(1 - \tau_e^2 \nabla^2) \rho_e \ddot{u}_i^e = \sigma_{ij,j}^e \quad (5)$$

弹性介质的应力应变关系为:

$$\sigma_{ij}^{eL} = 2\mu_e \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda_e u_{i,i}^e \quad (6)$$

式中: λ_e 、 μ_e ——弹性介质的Lamb常数;

δ_{ij} ——克罗内克符号。

联立式(3)(5)(6)可以得到非局部理论下弹性介质的控制方程:

$$(\lambda_e + \mu_e) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^e) + \mu_e \nabla^2 \mathbf{u}^e = (1 - \tau_e^2 \nabla^2) \rho_e \ddot{u}^e \quad (7)$$

1.3 非局部饱和多孔介质理论

在非局部弹性理论情况下,式(4)描述了弹性介质非局部应力和局部应力的关系,因此在饱和多孔弹性介质中也可以得到式(4)的相似形式:

$$(1 - \tau_b^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L \quad (8)$$

式中: σ_{ij} ——经典 Biot 理论下饱和多孔介质的应力张量 σ 的分量/Pa;

σ_{ij}^L ——非局部弹性理论下饱和多孔介质的应力张量 σ^L 的分量/Pa。

τ_b ——饱和多孔介质的非局部参数。

考虑动力情况下, 饱和多孔介质的平衡方程为:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i + \rho_i \ddot{w}_i \quad (9)$$

式中: u_i ——土骨架位移张量 \mathbf{u} 的分量/m;

w_i ——流体相对位移张量 \mathbf{w} 的分量/m;

ρ ——土体密度/(kg·m⁻³), $\rho = (1 - n_0)\rho_s + n_0\rho_f$;

ρ_s 、 ρ_f ——土颗粒、流体密度/(kg·m⁻³);

n_0 ——孔隙率。

由 Tong 等^[17]的研究结果可知, 流体的非局部影响应该被忽略, 因此流体的运动方程可以表示为:

$$p_{f,i}^L = \rho_f \ddot{u}_i + \frac{\rho_f}{n_0} \ddot{w}_i + \frac{\eta}{k} F(\zeta) \dot{w}_i \quad (10)$$

$$F(\zeta) = \frac{\zeta T(\zeta)}{4(1 + 2iT(\zeta)/\zeta)}, \quad \zeta = \delta \sqrt{f/f_c},$$

$$\delta = \sqrt{8\xi_1}, \quad T(\zeta) = \frac{\text{ber}'(\zeta) + i\text{bei}'(\zeta)}{\text{ber}(\zeta) + i\text{bei}(\zeta)} \quad (11)$$

式中: p_f^L ——孔隙水压力/Pa;

η ——流体的黏滞系数/(Pa·s);

k ——渗透系数/m⁻²;

$F(\zeta)$ ——黏性修正系数;

i ——虚数, $i = \sqrt{-1}$;

ber、bei——第一类零阶开尔文函数的实部和虚部;

f ——入射频率/Hz;

f_c ——特征频率/Hz;

ξ_1 ——弯曲因子。

基于经典 Biot 饱和多孔介质理论, 饱和多孔介质中的应力应变关系如下:

$$\sigma_{ij}^L = 2\mu \varepsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda e - \alpha p_f^L) \quad (12)$$

$$p_f^L = -\alpha M e + M \xi \quad (13)$$

$$\alpha = 1 - K_b/K_s, \quad M = Q/[n_0(\alpha - n_0)],$$

$$Q = n_0 K_s (K_s - n_0 K_s - K_b) / (K_s + \gamma K_s^2 - K_b), \quad \gamma = n_0 (1/K_f - 1/K_s) \quad (14)$$

式中: λ 、 μ ——饱和多孔介质的 Lamb 常数;

α 、 M ——饱和多孔介质的 Biot 参数;

e ——固体骨架的体应变, $e = \nabla \cdot \mathbf{u}$;

ξ ——流体体积含量的变化量, $\xi = \nabla \cdot \mathbf{w}$;

K_b ——土骨架的体积模量/Pa;

K_s 、 K_f ——土颗粒、流体的体积模量/Pa。

结合式(8)–(14)可以得到非局部弹性理论下饱和多孔介质的控制方程:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu + \alpha^2 M) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \alpha M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \\ (1 - \tau_b^2 \nabla^2) (\rho \ddot{\mathbf{u}} + \rho_f \ddot{\mathbf{w}}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_f \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\rho_f}{n_0} \ddot{\mathbf{w}} + \frac{\eta}{k} F(\xi) \dot{\mathbf{w}} \quad (16)$$

2 控制方程求解

为了求解介质的控制方程, 根据 Helmholtz 矢量分解原理, 弹性介质以及饱和多孔介质中的位移矢量 \mathbf{u}^e 、 \mathbf{u} 、 \mathbf{w} 可以用势函数分别表示为:

$$\mathbf{u}^e = \nabla \varphi_e + \nabla \times \psi_e \quad (17)$$

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_u + \nabla \times \psi_u \quad (18)$$

$$\mathbf{w} = \nabla \varphi_w + \nabla \times \psi_w \quad (19)$$

将式(17)代入到式(7)中, 将式(18)(19)代入到式(15)(16)中进行散度和旋度运算后整理可得:

$$\nabla^2 \varphi_e = \frac{(1 - \tau_e^2 \nabla^2) \rho_e}{\lambda_e + 2\mu_e} \ddot{\varphi}_e \quad (20)$$

$$\nabla^2 \psi_e = \frac{(1 - \tau_e^2 \nabla^2) \rho_e}{\mu_e} \ddot{\psi}_e \quad (21)$$

$$(\lambda + 2\mu + \alpha^2 M) \nabla^2 \varphi_u + \alpha M \nabla^2 \varphi_w = (1 - \tau_b^2 \nabla^2) (\rho \ddot{\varphi}_u + \rho_f \ddot{\varphi}_w) \quad (22)$$

$$\alpha M \nabla^2 \varphi_u + M \nabla^2 \varphi_w = \rho_f \ddot{\varphi}_u + \frac{\rho_f}{n_0} \ddot{\varphi}_w + \frac{\eta}{k} F(\zeta) \dot{\varphi}_w \quad (23)$$

$$\mu \nabla^2 \psi_u = (1 - \tau_b^2 \nabla^2) (\rho \ddot{\psi}_u + \rho_f \ddot{\psi}_w) \quad (24)$$

$$\rho_f \ddot{\psi}_u + \frac{\rho_f}{n_0} \ddot{\psi}_w + \frac{\eta}{k} F(\xi) \dot{\psi}_w = 0 \quad (25)$$

式(20)(21)的解的一般形式为:

$$\varphi_e = A_e \exp[i k_{pe} (lx + nz - c_{pe} t)] \quad (26)$$

$$\psi_e = B_e \exp[i k_{se} (lx + nz - c_{se} t)] \quad (27)$$

式中: A_e 、 B_e ——各相势函数幅值;

k_{pe} 、 k_{se} ——弹性介质中 P 波和 SV 波的波数;

l 、 n ——对应波的方向矢量值, $l^2 + n^2 = 1$;

c_{pe} 、 c_{se} ——弹性介质中 P 波和 SV 波的波速/(m·s⁻¹)。

式(22)–(25)的解的一般形式为:

$$\varphi_\alpha = A_\alpha \exp[i k_p (lx + nz - c_p t)] \quad (28)$$

$$\psi_\alpha = B_\alpha \exp[i k_s (lx + nz - c_s t)] \quad (29)$$

式中: A_α 、 B_α ——饱和多孔介质中各相势函数幅值,

$$\alpha = u, w;$$

k_p 、 k_s ——饱和多孔介质中 P 波、SV 波的波数；
 c_p 、 c_s ——饱和多孔介质中 P 波、SV 波的波速/ $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 。

将式(26)(27)代入到式(20)(21)中可以直接得到弹性介质中 P 波和 SV 波的波速如下：

$$c_{pe} = \sqrt{\frac{(\lambda_e + 2\mu_e - \rho_e \omega^2 \tau_e^2)}{\rho_e}} \quad (30)$$

$$c_{se} = \sqrt{\frac{\mu_e - \rho_e \omega^2 \tau_e^2}{\rho_e}} \quad (31)$$

式中： ω ——角频率/ $(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$ 。

将式(28)(29)代入到式(22)–(25)中可以得到关于饱和多孔介质中 P 波和 SV 波的特征方程：

$$Ak_p^4 + Bk_p^2 + C = 0, \quad Dk_s^2 - C = 0 \quad (32)$$

其中： $A = (\lambda + 2\mu)M + (\rho_f \alpha - \rho)M\omega^2 \tau^2$,

$$B = (m\rho - \rho_f^2)\tau^2 \omega^4 + ib\rho\tau^2 \omega^3 - i\omega b(M\alpha^2 + \lambda + 2\mu) - [(\lambda + 2\mu)m + M(\rho + m\alpha^2 - 2\alpha\rho_f)]\omega^2,$$

$$C = (m\rho - \rho_f^2)\omega^4 + ib\rho\omega^3,$$

$$D = (\rho_f^2 - m\rho)\tau^2 \omega^4 - ib\rho\tau^2 \omega^3 + m\mu\omega^2 + ib\mu\omega, \quad b = \eta F(\xi)/k.$$

由式(32)可得 P1 波、P2 波和 SV 波的波数：

$$k_{p1}^2 = k_{p2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad k_s^2 = C/D \quad (33)$$

式中： k_{p1} 、 k_{p2} 、 k_s ——P1 波、P2 波、SV 波的波数。

同时根据式(32)可以得到液相和固相势函数幅值之比：

$$m_i = \frac{A_{wi}}{A_{ui}} = \frac{\alpha M k_{pi}^2 - \rho_f \omega^2}{-M k_{pi}^2 + m \omega^2 + i \omega b} \quad (i = 1, 2) \quad (34)$$

$$m_3 = \frac{B_w}{B_u} = \frac{-\rho_f \omega^2}{m \omega^2 + i \omega b} \quad (35)$$

3 波场分析

3.1 波场的势函数表达式

图 1 中波场共分为两类，分别由饱和多孔介质和弹性介质构成。其中饱和多孔介质中总的波场势函数 φ_α^I 、 ψ_α^I 可表示为：

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^I &= A_{ip1}^\alpha \exp[i k_{ip1} (l_{ip1} x - n_{ip1} z - c_{ip1} t)] + \\ &\quad A_{ip1}^\alpha \exp[i k_{rp1} (l_{rp1} x + n_{rp1} z - c_{rp1} t)] + \quad (\alpha = u, w) \\ &\quad A_{rp2}^\alpha \exp[i k_{rp2} (l_{rp2} x + n_{rp2} z - c_{rp2} t)] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\psi_\alpha^I = B_{rs}^\alpha \exp[i k_{rs} (l_{rs} x + n_{rs} z - c_{rs} t)] \quad (\alpha = u, w) \quad (37)$$

式中： A_{ip1}^α —— α 相入射 P1 波的波幅系数；

A_{ip1}^α —— α 相反射 β 波的波幅系数， $\beta = p1, p2, s$ ，分别表示 P1 波、P2 波、SV 波；

l_{ip1} 、 n_{ip1} ——入射 β 波在 x 、 z 方向的方向矢量值；

l_{ip1} 、 n_{ip1} ——反射 β 波在 x 、 z 方向的方向矢量值；

c_{ip1} ——入射 β 波的波速/ $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ ；

B_{rs}^α —— α 相反射 SV 波的波幅系数。

弹性介质中总的波场势函数 φ_e 、 ψ_e 可表示为：

$$\varphi_e = A_{tpe} \exp[i k_{tpe} (l_{tpe} x - n_{tpe} z - c_{tpe} t)] \quad (38)$$

$$\psi_e = B_{tse} \exp[i k_{tse} (l_{tse} x - n_{tse} z - c_{tse} t)] \quad (39)$$

式中： A_{tpe} 、 B_{tse} ——弹性介质透射 P 波、SV 波的波幅系数；

k_{tpe} ——弹性介质透射 β 波的波数；

l_{tpe} 、 n_{tpe} ——弹性介质透射 β 波在 x 、 z 方向的方向矢量值；

c_{tpe} ——弹性介质透射 β 波的波速/ $(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 。

为满足分界面处的连续条件，任何两个相邻介质层中各体波的水平波数必相等。由 Snell 定律可知：

$$k_{ip1} l_{ip1} = k_{rp1} l_{rp1} = k_{rp2} l_{rp2} = k_{rs} l_{rs} = k_{tpe} l_{tpe} \quad (40)$$

3.2 位移势函数的解

由式(4)可知在非局部弹性理论下弹性介质中的非局部应力和局部应力存在如下关系：

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{eL} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2n} \nabla^{2n} \sigma_{ij}^{eL} \quad (41)$$

根据 Tong 等^[17] 和王宁等^[18] 的研究可知，由于非局部参数 τ 为高阶小量，所以，可将高阶无穷项 $\sum_{n=2}^{\infty} \tau^{2n} \nabla^{2n}$ 忽略。

因此，在弹性介质中非局部应力可以表示为：

$$\sigma_{ij}^e = (1 + \tau^2 \nabla^2) \sigma_{ij}^{eL} \quad (42)$$

进而弹性介质中的应力 σ^e 、位移 u^e 可以表示成如下的势函数形式：

$$u_x^e = \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} - \frac{\partial \psi_e}{\partial z}, \quad u_z^e = \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} + \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \quad (43)$$

$$\sigma_{xz}^e = \mu_e (1 + \tau^2 \nabla^2) \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial z^2} \right) \quad (44)$$

$$\sigma_{zz}^e = (1 + \tau^2 \nabla^2) \left[\lambda_e \left(\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2} \right) + 2\mu_e \left(\frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial x \partial z} \right) \right] \quad (45)$$

同理，在饱和多孔介质中非局部应力和局部应力之间的关系也应满足式(41)，因此饱和多孔介质中的

应力 σ 和位移 u, w 可以表示成如下的势函数形式:

$$u_x = \frac{\partial \varphi_u}{\partial x} - \frac{\partial \psi_u}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi_u}{\partial z} + \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \quad (46)$$

$$w_x = \frac{\partial \varphi_w}{\partial x} - \frac{\partial \psi_w}{\partial z}, \quad w_z = \frac{\partial \varphi_w}{\partial z} + \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \quad (47)$$

$$\sigma_{xz} = \mu(1 + \tau^2 \nabla^2) \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial z^2} \right) \quad (48)$$

$$p_f = - \left[\alpha M \left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial z^2} \right) + M \left(\frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_w}{\partial z^2} \right) \right] \quad (49)$$

$$\sigma_{zz} = (1 + \tau^2 \nabla^2) \begin{bmatrix} -\alpha p_f + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial z^2} \right) + \\ 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_u}{\partial x \partial z} \right) \end{bmatrix} \quad (50)$$

3.3 边界条件

如图1所示,在 $z=0$ 处的应力、位移连续边界条件为:

(1) 饱和多孔介质和弹性介质交界面处的法向位移连续:

$$u_z = u_z^e \quad (51)$$

(2) 饱和多孔介质和弹性介质交界面处的切向位移连续:

$$u_x = u_x^e \quad (52)$$

(3) 考虑饱和多孔介质层间界面的不透水条件,因此饱和多孔介质和弹性介质交界面处的正应力连续:

$$\sigma_{zz} + p_f = \sigma_{zz}^e \quad (53)$$

(4) 饱和多孔介质和弹性介质之间切应力连续:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}^e \quad (54)$$

(5) 饱和多孔介质界面处流体相对位移为0:

$$w_z = 0 \quad (55)$$

将式(43)—(50)代入到式(51)—(55)的边界条件中可以得到关于波幅系数的线性方程组:

$$AX = A_{ip1}B \quad (56)$$

其中,矩阵 $A = [a_{ij}]_{5 \times 5}$, $B = [b_{ij}]_{5 \times 1}$,

$$X = [A_{rp1} \quad A_{rp2} \quad B_{rs} \quad A_{ipe} \quad B_{tsr}]^T。$$

设入射波的幅值 $A_{ip1}=1$,进而通过求解线性方程组(56),就可以获得 X 内各波幅系数的透反射振幅比。

4 数值分析

4.1 验证

为了对本文方法的正确性进行验证,Tong等^[17]研究了非局部理论下饱和多孔介质中波的传播特性,因此本文饱和多孔介质参数取值同文献[17],具体数值见表1。图2给出了非局部理论下饱和多孔介质中纵波波速和横波波速随频率的变化曲线,从图2(a)可以看出本文解与文献解吻合较好。为了进一步说明本文方法的正确性,取 $\tau_e = \tau = 0$,本文研究问题退化为徐平等^[31]研究的P波从饱和多孔介质入射到弹性介质中层间界面的透反射问题,图2(b)给出了透射P波和透射SV波的振幅比随入射角度的变化规律,从图中可以看出本文解和文献解较为吻合,从而说明了本文研究方法的正确性。

表1 饱和土地基物理力学参数

Table 1 Physical and mechanical parameters of saturated soil foundation

材料参数	土颗粒密度/(kg·m ⁻³)	流体密度/(kg·m ⁻³)	流体体积模量/GPa	土颗粒体积模量/GPa	土骨架体积模量/MPa	剪切模量/MPa	孔隙率/m ⁻²	渗透系数/(Pa·s)	流体黏滞系数因数	弯曲孔隙半径/μm
取值	2 650	1 000	2.25	36	43.6	26.1	0.47	1×10 ⁻¹⁰	1×10 ⁻³	1 23

4.2 入射频率对振幅比的影响

为了充分研究非局部弹性理论下弹性介质和饱和多孔介质层间界面处的透反射问题,本文需要选取一组饱和土地基和弹性地基的物理力学参数,饱和土地基物理力学参数参见表1,弹性地基的拉梅常数分别为 $\lambda_e=1.225\times10^9$ Pa, $\mu_e=44.9\times10^6$ Pa, 密度为 $\rho_e=2 700$ kg/m³。由于本文是在非局部弹性理论下建立的相应数学模型,因此为了比较经典弹性理论与非局部弹性理论下波的传播特性的异同,取入射角 $\theta_{ip1}=30^\circ$ 。图3给出了两种理论下饱和多孔介质与弹性介质交界面处反射P1波、反射P2波、反射SV波、透射P

波、透射SV波的振幅比随频率(f)变化的曲线。在非局部弹性理论下当弹性介质和饱和多孔介质的非局部参数 $\tau_e=\tau_b=0$ 时,非局部弹性理论下的波动方程退化为经典弹性理论下的波动方程。从图3可以看出当频率较小时,两种理论下的振幅比曲线差异较小,并且曲线几乎重合,随着频率的增加两种理论下的振幅比差异逐渐增大,当频率较高时,这种差异性表现的尤为显著。这意味着弹性波在高频入射时,由于介质自身非局部参数的影响使得界面处的振幅比差异较大,非局部参数对于高频下波的传播特性的影响将无法被忽视。

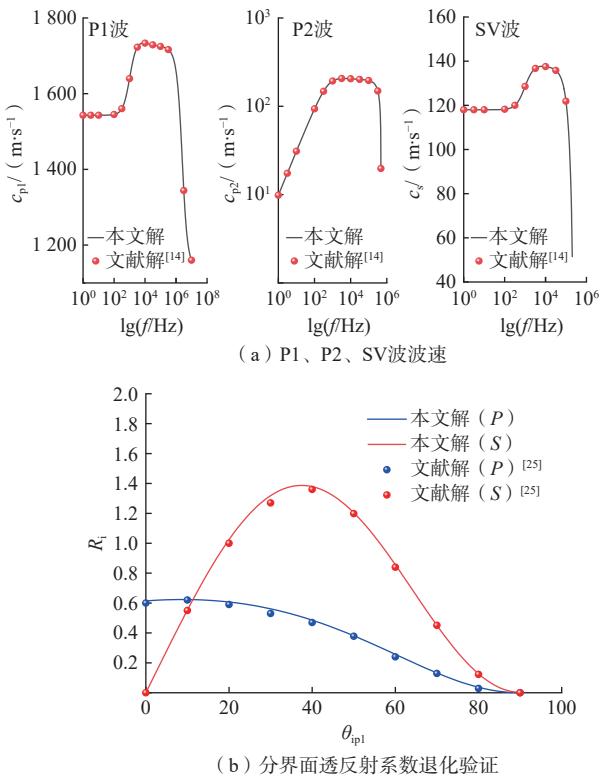


图2 非局部饱和介质波速、分界面透反射系数验证

Fig. 2 Verification of wave velocity, transmission and reflection coefficient at interfaces in non-localized saturated media

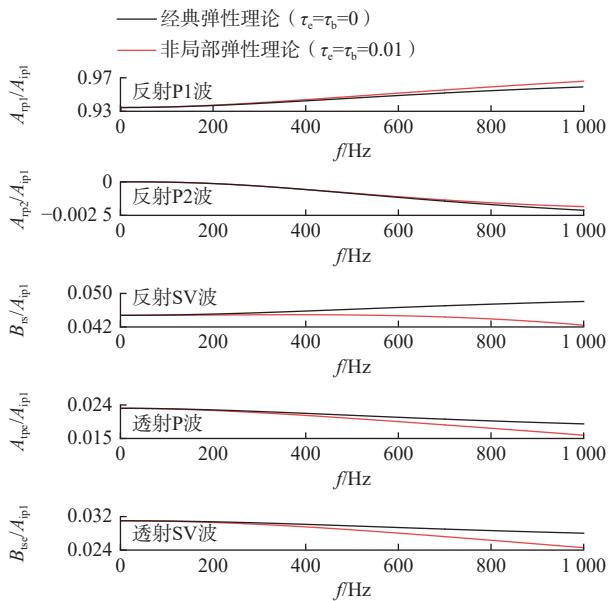


图3 分界面处振幅比随频率变化的曲线

Fig. 3 Variation curve of amplitude ratio with frequency at the interface

非局部弹性理论提供了一种更为精确的方法来分析和预测材料在不同加载条件下的动态响应,复合材料在航空、航天和汽车工业中广泛应用,其内部结构的非均匀性要求在设计和分析时必须考虑非局部

效应。由于这些应用中常常涉及到高频应力波的传播,非局部参数的引入可以提高对复合材料内部应力以及应变场的预测精度,从而优化材料设计,提高其性能和可靠性,这与经典弹性力学理论下的情形显著不同。

值得注意的是,当频率逐渐增加时,从图中还可以看出非局部参数对于 SV 波振幅比的影响要大于对 P 波反射波和透射波振幅比的影响,即两类理论下 P 波的振幅比随频率的增加变化趋势相同,SV 波的振幅比变化随频率增加呈现相反的趋势。当频率 $f=1\,000\,Hz$ 时,非局部弹性理论和经典弹性理论下 SV 波振幅比的差异达到 12%,这再次说明考虑非局部效应对于波的传播特性影响的重要性。

4.3 入射角度对振幅比的影响

不同的波的入射角度会影响反射波的强度和相位,进而影响波的传播效果。上一节讨论了入射角 \$\theta_{ip1}=30^\circ\$ 时界面处弹性波的传播规律,由于高频下非局部效应更加明显,本节为了进一步研究入射角度以及非局部参数对振幅比的影响规律,取入射频率 $f=1\,000\,Hz$ 。[图 4](#) 给出了两种理论下介质交界面处反射 P1 波、反射 P2 波、反射 SV 波、透射 P 波、透射 SV 波的振幅比随入射角度变化的曲线。当波垂直入射时 ($\theta_{ip1}=0^\circ$),此时反射 SV 波和透射 SV 波消失,界面处只存在反射 P1 波、反射 P2 波、透射 P 波,此时反射 P1 波振幅比达到最大。当波掠入射时 ($\theta_{ip1}=90^\circ$),反射 P1 波振幅比为 1,界面处不产生任何其余反射波。随着入射角度的增加反射 P2 波、反射 SV 波、透射 SV 波的振幅比均呈现振幅比随着角度增加先增大后减小的趋势,并且在角度 $\theta_{ip1}=77^\circ$ 附近出现峰值。在两种理论下随着角度的增加反射 P1 波的振幅比差异性较小,受到的影响最小,反射 P2 波、反射 SV 波、透射 P 波、透射 SV 波受到角度变化的影响程度相似,其中透射 P 波受到角度变化影响最大,两种理论下在 $\theta_{ip1}=77^\circ$ 时振幅比差异达到 33%。波的入射角度对波的透反射特性有显著影响,对于评估环境振动在不同角度入射时对建筑物的影响具有重要意义,尤其是在斜坡地带或复杂地质结构中,非局部参数的引入可以提供更为精确的动力响应预测,从而为工程设计和灾害预防提供科学依据。

4.4 单一非局部参数对振幅比的影响

由于介质的非局部效应显著的影响了波的传播特性,因此为了进一步探究介质的非局部参数对波的传播特性的影响规律,取入射角度 $\theta_{ip1}=30^\circ$,入射频率

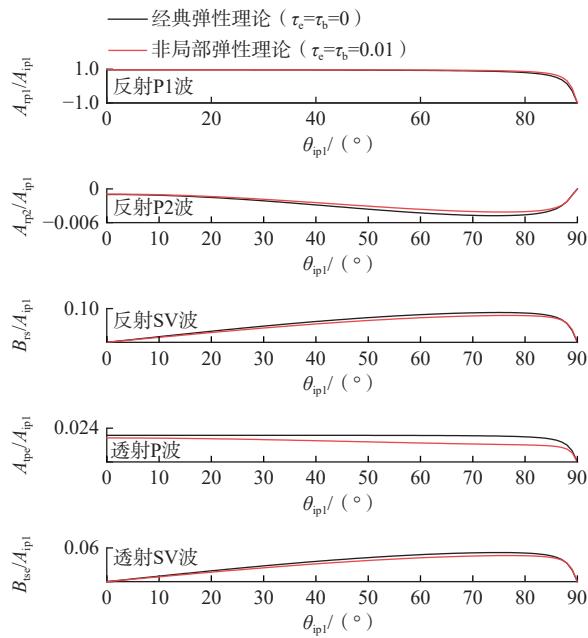


图 4 分界面处振幅比随角度变化的曲线

Fig. 4 The variation curve of amplitude ratio with angle at the interface

$f=10, 500, 1000 \text{ Hz}$ 。另外, 为了方便, 取弹性介质和饱和多孔介质的非局部参数相同, 即 $\tau_e=\tau_b$ 。**图 5** 给出了介质交界面处反射 P1 波、反射 P2 波、反射 SV 波、透射 P 波、透射 SV 波的振幅比随非局部参数变化的曲线。从图中可以看出当入射频率 $f=10 \text{ Hz}$ 时, 随着非

局部参数的增加, 各类波的振幅比趋势一定, 基本无波动变化。当入射频率 $f=1000 \text{ Hz}$ 时可以看出反射 P1 波的振幅比随着非局部参数的增加而增加, 其余波的振幅比均呈现随非局部参数的增加而减小的趋势, 这同 4.2 节发现的规律相似。这说明了在高频振动时介质界面处的透反射规律受到介质的非局部参数显著影响, 因此在非局部弹性理论下, 考虑介质的非局部参数对工程隔振、矿物探测均具有实际的工程意义。

4.5 层间非局部参数对振幅比的影响

上节对介质的非局部参数的讨论中, 为了方便, 取 $\tau_e=\tau_b$, 但是实际工程中饱和多孔介质和弹性介质的物理特性显著不同, 进而两类介质的非局部参数应存在差异性, 为了进一步探究两类介质各自的非局部参数对层间界面处弹性波传播规律的影响, 取入射角度 $\theta_{ip1}=30^\circ$, 入射频率 $f=1000 \text{ Hz}$ 。**图 6** 给出了介质交界面处反射 P1 波、反射 P2 波、反射 SV 波、透射 P 波、透射 SV 波的振幅比随非局部参数变化的三维曲线。当弹性介质和饱和多孔介质的非局部参数均增大时, 反射 P1 波和反射 SV 波的振幅比随之增大, 反射 P2 波的振幅比随之减小。值得注意的是透射 P 波和透射 SV 波的振幅比随非局部参数增加呈现相同的趋势, 即弹性介质的非局部参数 τ_e 的变化对透射波的振幅比的影响极为微弱, 只有当饱和多孔介质的非局部参

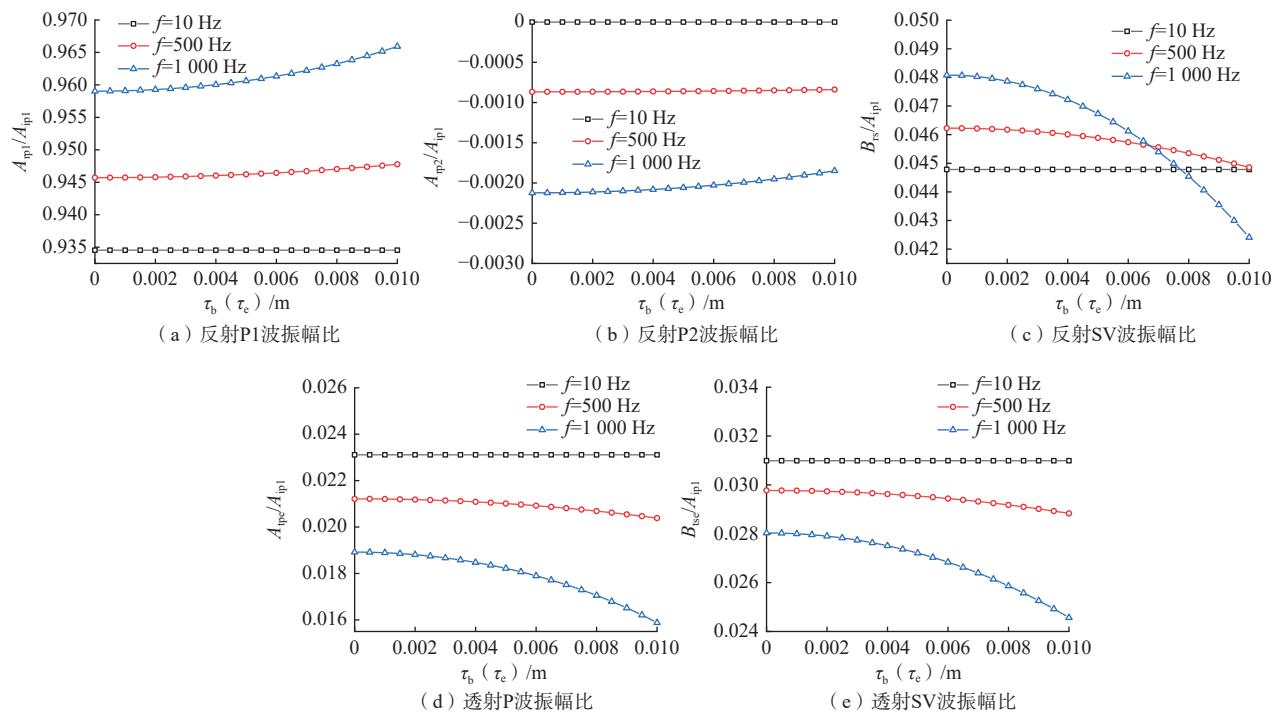


图 5 分界面处振幅比随单一非局部参数变化的曲线

Fig. 5 Variation curve of amplitude ratio at the interface with a single nonlocal parameter

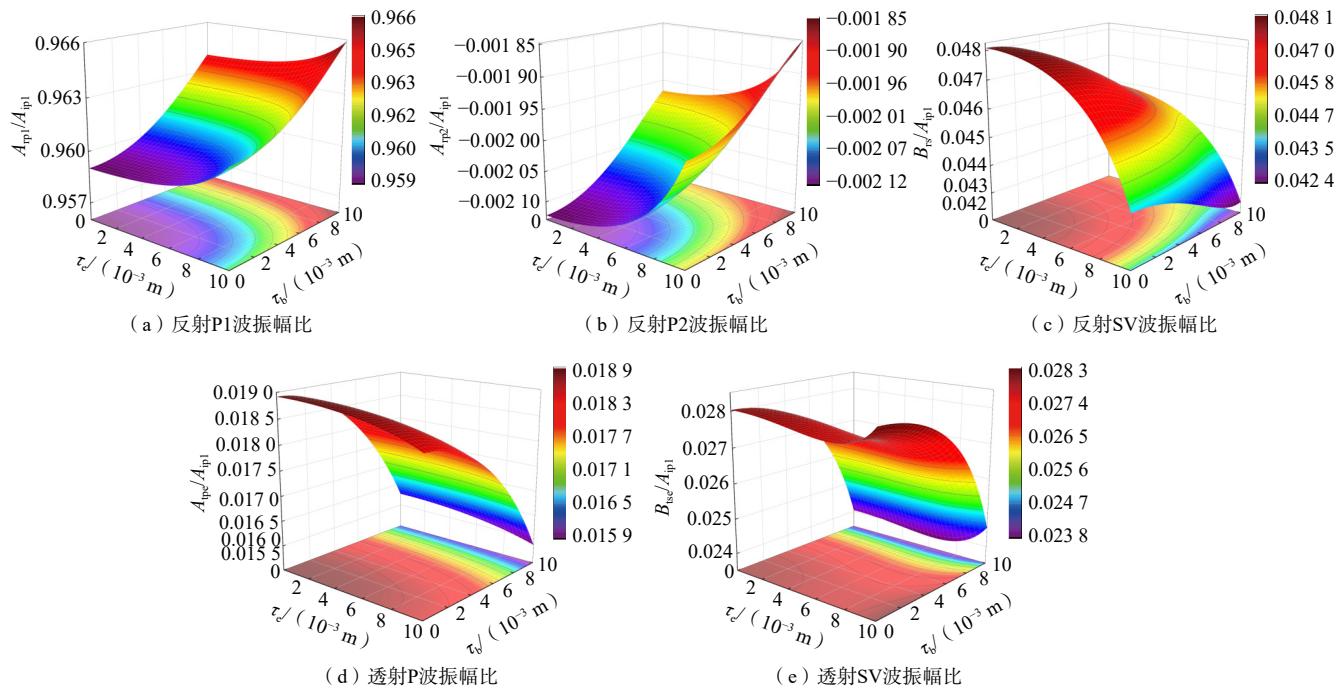


图6 分界面处振幅比随层间非局部参数变化的曲线

Fig. 6 Variation curve of amplitude ratio at the interface with the change of non-local parameters between layers

数增加至一定范围($\tau_b \geq 0.008$)时,透射波的振幅比才会呈现增大的趋势。本节的研究结果表明,层间非局部参数的变化对透射波的振幅比有显著影响,这对于分析地震波在不同地质结构中的传播尤为重要。在地震灾害预防和地质勘探中,考虑层间非局部参数的影响可以提供更为精确的波传播模型,从而提高地震波探勘的准确性和地震危险性评估的可靠性。

5 结论

(1) 非局部弹性理论和经典弹性理论下界面处的振幅比具有显著差异,并且随着频率的增加这种差异性表现的尤为显著。这意味着弹性波在高频入射时,由于介质自身非局部参数的影响使得界面处的振幅比差异较大,非局部效应对于高频下波的传播特性的影响将无法被忽视。

(2) 入射角度和单一非局部参数均对振幅比有显著影响。在两种理论下随着角度的增加反射P1波的振幅比受到角度变化的影响最小,其余波型波受到角度变化的影响程度相似,其中透射P波受到角度变化影响最大,两种理论下在 $\theta_{ip1}=77^\circ$ 时振幅比最大差异达到33%。反射P1波的振幅比随着单一非局部参数的增加而增加,其余波的振幅比均呈现随单一非局部参数的增加而减小的趋势,在高频振动时介质界面处的透反射规律受到介质非局部参数的显著影响。

(3) 当弹性介质和饱和多孔介质的非局部参数均增大时,反射P1波和反射SV波的振幅比随之增大,反射P2波的振幅比随之减小。值得注意的是透射P波和透射SV波的振幅比随非局部参数增加呈现相同的趋势,即弹性介质的非局部参数 τ_e 的变化对透射波的振幅比的影响极为微弱,只有当饱和多孔介质的非局部参数增加至一定范围($\tau_b \geq 0.008$)时,透射波的振幅比才会呈现增大的趋势。

参考文献 (References) :

- [1] 王裕宁,赵宝生.二维各向同性多孔介质的弹性动力学通解[J].应用数学和力学,2019,40(9): 1025–1034.
[WANG Yuning, ZHAO Baosheng. General solutions of elastodynamics for 2D isotropic porous media[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(9): 1025 – 1034. (in Chinese with English abstract)]]
- [2] 雷津,崔圣华,裴向军,等.基于射线理论的垂直P波入射过程滑坡滑带应力放大特征及成因分析[J].地质科技通报,2022,41(6): 149–161. [LEI Jin, CUI Shenghua, PEI Xiangjun, et al. Stress amplification of the landslide slip zone during vertical P-wave incidence based on ray theory[J]. Bulletin of Geological Science and Technology, 2022, 41(6): 149 – 161. (in Chinese with English abstract)]]
- [3] 马露,王坤,陶思源,等.基于有效应力法的单桩负摩

- 阻力解析解 [J]. 水文地质工程地质, 2024, 51(5): 79 – 86. [MA Lu, WANG Kun, TAO Siyuan, et al. Analytical solution for negative skin friction of single pile based on effective stress method[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2024, 51(5): 79 – 86. (in Chinese with English abstract)]
- [4] 李修磊, 谢飞, 陈臣, 等. 基于声发射的张开型单裂隙岩石裂纹扩展行为特性研究 [J]. 水文地质工程地质, 2024, 51(3): 90 – 101. [LI Xiulei, XIE Fei, CHEN Chen, et al. Investigation of crack propagation behavior of opening single fractured rock based on acoustic emission technology[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2024, 51(3): 90 – 101. (in Chinese with English abstract)]
- [5] 戚志鹏, 郭建磊, 孙乃泉, 等. 隧道瞬变电磁克希霍夫偏移成像与地质灾害探测 [J]. 煤田地质与勘探, 2022, 50(5): 129 – 135. [QI Zhipeng, GUO Jianlei, SUN Naiquan, et al. Geological structure detection with tunnel transient electromagnetic Kirchhoff 2D migration imaging[J]. *Coal Geology & Exploration*, 2022, 50(5): 129 – 135. (in Chinese with English abstract)]
- [6] 李航, 孙宇航, 李佳慧, 等. 基于波动方程的地震波数值模拟研究综述 [J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2025, 55(2): 627 – 645. [LI Hang, SUN Yuhang, LI Jiahui, et al. A comprehensive review of numerical simulation of seismic waves based on wave equation[J]. *Journal of Jilin University(Earth Science Edition)*, 2025, 55(2): 627 – 645. (in Chinese with English abstract)]
- [7] AKI K, RICHARDS P G. Quantitative seismology: Theory and methods[M]. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1980: 1–557.
- [8] 张峰, 李向阳. 各向同性介质弹性阻抗的张量表示 [J]. 中国科学(地球科学), 2015, 45(6): 799 – 810. [ZHANG Feng, LI Xiangyang. Exact elastic impedance tensor for isotropic media[J]. *Scientia Sinica(Terrae)*, 2015, 45(6): 799 – 810. (in Chinese with English abstract)]
- [9] 田玥琳, 罗刚, 邹鹏, 等. 落石冲击作用下拦石桩设计方法研究 [J]. 中国地质灾害与防治学报, 2024, 35(3): 88 – 96. [TIAN Yuelin, LUO Gang, ZOU Peng, et al. Study on design method of rockfall retaining pile under rockfall impact[J]. *The Chinese Journal of Geological Hazard and Control*, 2024, 35(3): 88 – 96. (in Chinese with English abstract)]
- [10] ERINGEN A C, EDELEN D G B. On nonlocal elasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1972, 10(3): 233 – 248.
- [11] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves[J]. *Journal of Applied Physics*, 1983, 54(9): 4703 – 4710.
- [12] MURMU T, PRADHAN S C. Vibration analysis of nanoplates under uniaxial prestressed conditions via nonlocal elasticity[J]. *Journal of Applied Physics*, 2009, 106(10): 104301.
- [13] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous media. I. Low-frequency range[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 168 – 191.
- [14] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous medium[J]. *Journal of Applied Physics*, 1962, 33(4): 1482 – 1498.
- [15] LEE K I, HUMPHREY V F, KIM B N, et al. Frequency dependencies of phase velocity and attenuation coefficient in a water saturated sandy sediment from 0.3 to 10 MHz[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2007, 121(5): 2553 – 2558.
- [16] SMYRLIS V D, PEGIOS I P, PAPARGYRI-BESKOU S. On wave propagation in gradient poroelasticity[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2016, 88: 72 – 75.
- [17] TONG Lihong, YU Yang, HU Wentao, et al. On wave propagation characteristics in fluid saturated porous materials by a nonlocal Biot theory[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 379: 106 – 118.
- [18] 王宁, 丁海滨, 童立红, 等. 基于非局部 Biot 理论的平面波作用下饱和地基动力响应 [J]. 上海交通大学学报, 2021, 55(6): 663 – 671. [WANG Ning, DING Haibin, TONG Lihong, et al. Dynamic responses of saturated soil foundation subjected to plane wave based on nonlocal-Biot theory[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2021, 55(6): 663 – 671. (in Chinese with English abstract)]
- [19] 丁海滨, 管凌霄, 童立红, 等. 基于非局部 Biot 理论的循环荷载下饱和土地基动力特性研究 [J]. *工程力学*, 2023, 40(3): 141 – 152. [DING Haibin, GUAN Lingxiao, TONG Lihong, et al. On investigating the dynamic characteristics of saturated soil foundation subjected to cyclic load based on nonlocal Biot theory[J]. *Engineering Mechanics*, 2023, 40(3): 141 – 152. (in Chinese with English abstract)]
- [20] 王观阳, 汪晓红, 熊文勇, 等. 基于非局部 Biot 理论的矩形移动荷载下饱和土动力响应 [J]. *公路交通科*

- 技, 2024, 41(3): 61 – 71. [WANG Guanyang, WANG Xiaohong, XIONG Wenyong, et al. Dynamic response of saturated soil under rectangular moving load based on nonlocal Biot theory[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2024, 41(3): 61 – 71. (in Chinese with English abstract)]
- [21] 徐长节, 丁海滨, 童立红, 等. 基于非局部 Biot 理论下饱和土中深埋圆柱形衬砌对平面弹性波的散射 [J]. *岩土工程学报*, 2018, 40(9): 1563 – 1570. [XU Changjie, DING Haibin, TONG Lihong, et al. Scattering waves generated by cylindrical lining in saturated soil based on nonlocal Biot theory[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, 40(9): 1563 – 1570. (in Chinese with English abstract)]
- [22] XU C J, DING H B, TONG L H, et al. Scattering of a plane wave by shallow buried cylindrical lining in a poroelastic half-space[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 70: 171 – 189.
- [23] DING H B, TONG L H, XU C J, et al. Dynamic responses of shallow buried composite cylindrical lining embedded in saturated soil under incident P wave based on nonlocal-Biot theory[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2019, 121: 40 – 56.
- [24] TONG L H, LAI S K, ZENG L L, et al. Nonlocalscale effect on Rayleigh wave propagation in porous fluid saturated materials[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, 148: 459 – 466.
- [25] 周凤玺, 柳鸿博, 蔡袁强. 饱和多孔热弹性介质中 Rayleigh 波传播特性分析 [J]. *岩土力学*, 2020, 41(1): 315 – 324. [ZHOU Fengxi, LIU Hongbo, CAI Yuanqiang. Analysis of propagation characteristics of Rayleigh waves in saturated porothermoelastic media[J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(1): 315 – 324. (in Chinese with English abstract)]
- [26] 李伟华. P 波入射下土饱和度对土层交界面运动的影响 [J]. *岩土力学*, 2002, 23(6): 782 – 786. [LI Weihua. Influence of water saturation on horizontal and vertical motion at a mainly water-saturated porous soil interface induced by P wave[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2002, 23(6): 782 – 786. (in Chinese with English abstract)]
- [27] LO Weicheng, SPOSITO G, MAJER E. Wave propagation through elastic porous media containing two immiscible fluids[J]. *Water Resources Research*, 2005, 41(2): W02025.
- [28] MA Qiang, SHU Jinhui, ZHOU Fengxi. Theoretical study of s wave passing through a double-layer wave impeding block in the unsaturated soil[J]. *Computers and Geotechnics*, 2022, 152: 105018.
- [29] QIU Haomiao, XIA Tangdai, YU Bingqi, et al. Modeling of wave reflection in gas hydrate-bearing sediments[J]. *Wave Motion*, 2019, 85: 67 – 83.
- [30] MA Qiang, JIANG Huipeng, ZHOU Fengxi. Reflection and transmission of plane harmonic P-wave at planar interface between elastic medium and frozen poroelastic medium[J]. *Geophysical Journal International*, 2023, 234(2): 948 – 971.
- [31] 徐平, 夏唐代. 弹性波在准饱和土和弹性土界面的反射与透射 [J]. *力学与实践*, 2006, 28(6): 58 – 63. [XU Ping, XIA Tangdai. Reflection and transmission of elastic wave at the interface of nearly saturated soil and elastic soil[J]. *Mechanics in Engineering*, 2006, 28(6): 58 – 63. (in Chinese with English abstract)]

编辑: 刘真真