



## 非饱和成层土稳态渗流问题的解析计算

陈佩佩, 乔栋, 吴楠

### Analytical calculation of steady seepage in unsaturated layered soils

CHEN Peipei, QIAO Dong, and WU Nan

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202309038>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 考虑基质吸力的非饱和土邓肯-张统计损伤修正模型

The Duncan-Chang statistical damage correction model of unsaturated soil considering matric suction

谭维佳, 魏云杰, 王俊豪, 高敬轩 水文地质工程地质. 2022, 49(1): 84–91

#### 考虑非饱和土基质吸力的丁家坡滑坡变形机制及稳定性评价

Deformation mechanism and stability evaluation of Dingjiapo landslide considering the matric suction of unsaturated soil

石爱红, 李国庆, 丁德民, 范权坤 水文地质工程地质. 2022, 49(6): 141–151

#### 初始孔隙比对高吸力下非饱和土土水特性的影响

Effect of initial void ratio on the soil water characteristics of unsaturated soil at high suctions

陈嘉伟, 李泽, 韩哲, 高游, 熊勇林, 丁瑞旋 水文地质工程地质. 2022, 49(4): 47–54

#### 膨胀土边坡非饱和渗流及渐进性破坏耦合分析

A coupling analysis of unsaturated seepage and progressive failure of an expansive soil slope

陈亮胜, 韦秉旭, 廖欢, 张寒冰 水文地质工程地质. 2020, 47(4): 132–140

#### 考虑孔隙水微观赋存形态的非饱和粉土有效应力方程及其验证

An effective stress equation for unsaturated silt considering the microstructure of pore water and its verification

曾立峰, 邵龙潭, 牛庚, 郭晓霞 水文地质工程地质. 2022, 49(4): 37–46

#### 基于可靠度方法的全基质吸力段土-水特征模型研究

A study of the soil-water reliability model in the whole matric suction range

刘青灵, 简文彬, 许旭堂, 聂闻 水文地质工程地质. 2022, 49(1): 92–100



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

DOI: [10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202309038](https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202309038)

陈佩佩, 乔栋, 吴楠. 非饱和成层土稳态渗流问题的解析计算 [J]. 水文地质工程地质, 2024, 51(5): 68-78.

CHEN Peipei, QIAO Dong, WU Nan. Analytical calculation of steady seepage in unsaturated layered soils [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2024, 51(5): 68-78.

## 非饱和成层土稳态渗流问题的解析计算

陈佩佩<sup>1,2</sup>, 乔 栋<sup>3</sup>, 吴 楠<sup>4</sup>

(1. 北京建筑大学理学院, 北京 100044; 2. 北京工业大学城市建设学部, 北京 100124;  
3. 北京建筑大学土木与交通工程学院, 北京 100044; 4. 苏州城市学院智能制造与  
智慧交通学院, 江苏 苏州 215104)

**摘要:** 广泛存在的成层土非饱和稳态渗流的解析计算研究相对薄弱。基于达西渗流定律和土层界面的连续性条件, 构建了描述非饱和成层土稳态渗流过程的数学模型。使用分离变量技术和数学归纳思想, 获得了成层土同一剖面的基质吸力、有效饱和度与吸应力沿高程分布的解析表达式。基于 COMSOL 数值分析平台对解析算法进行了验证计算, 从而实现了非饱和成层土稳态渗流过程的解析求解。而后, 探讨了土层界面的存在对渗流过程的影响并开展了参数敏感度分析。分析表明: (1) 相同入渗条件下相同高程处砂土的基质吸力最大, 黏土最小; 地表渗流速率的不同对粉土层有效饱和度分布影响最大, 砂土最小。(2) 黏土层中吸应力近乎线性增长, 砂土的吸应力则沿高程先增大后减小; 土层界面的存在会影响基质吸力沿高程的增长速率, 可使有效饱和度和吸应力沿高程分布发生突变。(3) Gardner 模型参数  $\alpha$  值越小, 相同高程处基质吸力值越大, 饱和土渗透系数( $k_s$  值)越小, 基质吸力增长速率越慢;  $\alpha$  与  $k_s$  取值越小, 有效饱和度降低速率越慢;  $\alpha$  取值越小或  $k_s$  取值越大, 地表处的吸应力值越大。研究成果可为诸如边坡稳定等工程地质问题提供一定的理论支撑。

**关键词:** 非饱和成层土; 稳态渗流; 基质吸力; 有效饱和度; 吸应力; 解析解

中图分类号: TU43

文献标志码: A

文章编号: 1000-3665(2024)05-0068-11

## Analytical calculation of steady seepage in unsaturated layered soils

CHEN Peipei<sup>1,2</sup>, QIAO Dong<sup>3</sup>, WU Nan<sup>4</sup>

(1. School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China;  
2. Faculty of Architecture, Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Technology, Beijing, 100124, China; 3. School of Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 100044, China; 4. College of Smart Manufacturing and Intelligent Transportation, Suzhou City University, Suzhou, Jiangsu 215104, China)

**Abstract:** The analytical calculations of unsaturated steady-state seepage in the widespread layered soils were relatively rare. Based on the Darcy seepage theorem and the continuity condition of soil layer interface, a mathematical model describing the steady seepage process of unsaturated layered soil was constructed. The

收稿日期: 2023-09-14; 修订日期: 2023-12-07

投稿网址: [www.swdzgcdz.com](http://www.swdzgcdz.com)

基金项目: 国家自然科学基金项目(51808026; 41972279); 金字塔人才培养工程“建大英才”支持计划(JDYC20200325); 北京市教委科技计划一般项目(KM201910016003); 北京建筑大学研究生创新项目(PG2022038; PG2022042)

第一作者: 陈佩佩(1987—), 男, 博士, 副教授, 主要从事无网格数值算法及环境岩土力学等方面的教学和科研。

E-mail: [chenpeipei@bucea.edu.cn](mailto:chenpeipei@bucea.edu.cn)

analytical expressions of matric suction, effective saturation, and suction stress along the elevation for the same profile of layered soil were obtained by using the separation variable technique and mathematical induction. The analytical algorithm was validated based on the COMSOL numerical analysis platform, which enabled the analytical solution of the steady-state seepage process in unsaturated layered soils. Then, the influence of soil layer interface on seepage process was discussed and the sensitivity analysis of parameters was carried out. The analysis shows that: (1) Under the same infiltration conditions, the matric suction of sand at the same elevation is the highest, while that of clay is the lowest. The difference in surface seepage rate has the greatest impact on the distribution of effective saturation in the silt layer, while it has the smallest impact in the sand layer. (2) The suction stress in the clay layer increases almost linearly, while the suction stress in sand increases first and then decreases along the elevation. The presence of soil interface can affect the growth rate of matric suction along the elevation, leading to a sudden change in the distribution of effective saturation and suction stress along the elevation. (3) The smaller Gardner model parameter  $\alpha$ , the greater the matric suction value at the same elevation, while the smaller the  $k_s$  value of saturated soil, the slower the growth rate of matric suction. The smaller the values of  $k_s$  and  $\alpha$ , the slower the rate of effective saturation reduction. The smaller the value of  $\alpha$  or the larger the value of  $k_s$ , the greater the suction stress value at the surface. The research results can provide theoretical support for engineering geological problems such as slope stability.

**Keywords:** unsaturated layered soils; steady seepage; matric suction; effective saturation; suction stress; analytical solution

非饱和渗流在岩土工程实践中有着广泛的应用背景,已成为环境岩土和工程地质领域的重要研究内容<sup>[1-3]</sup>。比如,降雨入渗或蒸发导致的边坡和路堤失稳问题频发,研究表明此类问题均与非饱和土渗流密切相关<sup>[4-7]</sup>。因此,开展非饱和土体内的渗流运动研究具有重要的理论意义和实践价值。

关于非饱和稳定渗流问题的数值计算研究较为活跃。比如,Chen 等<sup>[8]</sup>有效地解决了矩形坝体稳态渗流问题。Chapuis<sup>[9]</sup>基于有限元算法对有渗透补给情况下非饱和稳定渗流方程进行计算。Zhai 等<sup>[10]</sup>基于有限差分法对非饱和稳定渗流问题中的参数进行了合理的标定。Remar 等<sup>[11]</sup>使用有限差分法研究了在有限深度下排水沟底部的非均质多孔介质稳态渗流问题。Griffiths 等<sup>[12]</sup>采用有限元分析方法,对稳定渗流条件下的非饱和边坡进行稳定性分析。

相比而言,解析手段对所关注的问题有更加精确的数学表达,可以更加便捷地确定场变量演变规律,因此非饱和渗流的解析计算一直备受青睐<sup>[13]</sup>。比如,Lu 等<sup>[14]</sup>基于 Gardner 水力参数模型,使用基尔霍夫变换推导出非饱和土导水率的解析解;Tracy<sup>[15]</sup>利用分离变量法和拉普拉斯变换,得到一维非饱和稳定渗流状态下的压力水头解析表达式,但所给出的解析解形式较为复杂;Andersson 等<sup>[16]</sup>采用蒙特卡洛模拟方法,推导出非饱和稳态入渗下的土体体积含水率解析表达式;

Hopmans 等<sup>[17]</sup>研究了二维非饱和稳定渗流条件下的土体孔压和渗流通量随深度的变化规律;Lu 等<sup>[18]</sup>基于基尔霍夫变换对非饱和稳态渗流方程线性化,得到孔隙压力和流量的解析表达式;Zhu 等<sup>[19]</sup>基于非饱和渗透系数表达式与 Brooks and Corey 土水特征曲线模型,得到非饱和稳态垂直入渗下的基质吸力解析解,其解的形式较为复杂;Rockhold 等<sup>[20]</sup>得到了层状土一维稳态垂直渗流的解析表达式,然而对于土层界面的影响讨论不足。此外,非饱和渗透系数的合理确定是渗流过程解析计算的重要方面,相关的研究成果可见于 Zhai 等<sup>[21-22]</sup>的工作。目前的工作多是针对单层土体开展的解析计算研究,对于广泛存在的多层分布成层土非饱和渗流解析研究相对薄弱<sup>[23-24]</sup>。

本文构建出描述非饱和成层土稳态渗流的数学模型。以 Gardner 指数型水力参数模型为基础,使用分离变量技术和数学归纳思想,实现了对非饱和成层土稳态渗流过程的解析计算,获得了基质吸力、有效饱和度与吸应力沿高程分布的解析表达式;研究了土层界面的存在对渗流过程的影响并进行了参数敏感度分析。

## 1 成层土稳态渗流的解析计算

### 1.1 成层土稳态渗流理论模型

通常而言,土层剖面示意图可用图 1 表示,其中

$l_i$  为第  $i$  层土的厚度, 假定  $y$  轴与地下水位平齐。在降雨入渗或蒸发条件下, 半无限大非饱和成层土会发生竖直方向水分运动, 其过程可基于达西定律进行描述, 数学表达式如下<sup>[25]</sup>:

$$q = -k \cdot \left( \frac{dh_m}{dz} + 1 \right) \quad (1)$$

式中:  $k$ —非饱和渗透系数/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$q$ —渗流速度/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$z$ —垂直方向坐标/ $\text{m}$ ;

$h_m$ —基质吸力水头/ $\text{m}$ 。

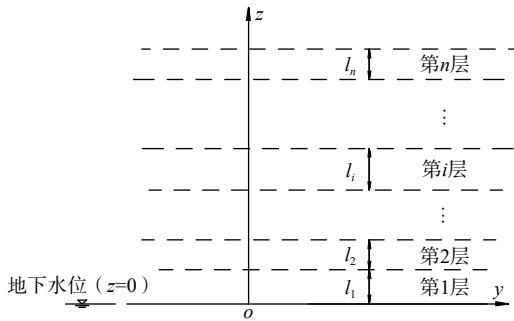


图 1 成层土剖面示意图

Fig. 1 Schematic diagram of layered soil profile

Gardner 的单变量指型渗透系数模型被广泛用来开展非饱和渗流的解析计算, 其表达式如下<sup>[26]</sup>:

$$k = k_s \cdot \exp(-\alpha \cdot \psi) \quad (2)$$

式中:  $k_s$ —饱和渗透系数/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$\alpha$ —模型经验参数/ $\text{kPa}^{-1}$ ;

$\psi$ —基质吸力/ $\text{kPa}$ 。

需要指出, 单峰型 Gardner 模型可有效捕捉非饱和土在饱和度较高区域土水特征曲线的变化特征, 而诸如残积土的双峰型非饱和土第一个峰出现在高饱和区域, 因此本文的研究成果对双峰型非饱和土亦有一定的适用性。

$\psi$  与  $h_m$  的关系如下<sup>[26]</sup>:

$$h_m = \frac{\psi}{\gamma_w} \quad (3)$$

式中:  $\gamma_w$ —水的容重/( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )。

将式(2)(3)代入式(1)中, 可得:

$$q = -k_s \cdot \exp(-\alpha \cdot \psi) \cdot \left( -\frac{d\psi}{\gamma_w dz} + 1 \right) \quad (4)$$

由质量守恒可知土层界面处的渗流速度连续, 根据能量守恒可知基质吸力在土层界面处亦连续变化<sup>[23, 27~28]</sup>。在土层分界处的连续性条件是非饱和成层土稳态渗流理论的重要组成部分, 其表达式如下:

$$\begin{cases} \psi^i(l_1 + l_2 + \dots + l_i) = \psi^{i+1}(l_1 + l_2 + \dots + l_i) \\ q^i(l_1 + l_2 + \dots + l_i) = q^{i+1}(l_1 + l_2 + \dots + l_i) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $\psi^i(l_1 + l_2 + \dots + l_i)$ —第  $i$  土层上边界处的基质吸力/ $\text{kPa}$ , 其中  $\psi^i$  的上角标“ $i$ ”表示第  $i$  土层;

$\psi^{i+1}(l_1 + l_2 + \dots + l_i)$ —第  $i+1$  土层下边界处的基质吸力/ $\text{kPa}$ ;

$q^i(l_1 + l_2 + \dots + l_i)$ —第  $i$  土层上边界处所对应的渗流速度/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$q^{i+1}(l_1 + l_2 + \dots + l_i)$ —第  $i+1$  土层下边界处所对应的渗流速度/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )。

需要说明的是, 第  $i$  土层的高度取值范围为  $l_1 + l_2 + \dots + l_{i-1} \leq z \leq l_1 + l_2 + \dots + l_i$ 。

## 1.2 成层土基质吸力的解析表达式

对式(4)进行解析计算, 得通解如下:

$$\psi = \gamma_w z - \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left[ C - \frac{q}{k_s} \cdot \exp(\alpha \gamma_w z) \right] \quad (6)$$

式中:  $C$ —待定系数。

需要指出, 式(6)适用于计算稳定渗流状态下图 1 所示各层土体的基质吸力分布, 只需根据土层界面连续条件确定系数  $C$  并将当前土层的参数代入即可。

将第 1 层土的下边界条件  $\psi|_{z=0} = 0$  代入式(6), 可得:

$$C_1 = 1 + \frac{q}{k_{s1}} \quad (7)$$

式中:  $C_1$ —第 1 土层的待定系数;

$k_{s1}$ —第 1 土层的渗透系数/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )。

将式(7)代入式(6), 可得:

$$\psi^1(z) = \gamma_w z - \frac{1}{\alpha_1} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{q}{k_{s1}} - \frac{q}{k_{s1}} \cdot \exp(\alpha_1 \gamma_w z) \right] \quad (8)$$

式中:  $\alpha_1$ —第 1 土层的参数/ $\text{kPa}^{-1}$ 。

将  $z=l_1$  代入式(8)可知第 1 土层上边界处的基质吸力为:

$$\psi^1(l_1) = \gamma_w l_1 - \frac{1}{\alpha_1} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{q}{k_{s1}} - \frac{q}{k_{s1}} \cdot \exp(\alpha_1 \gamma_w l_1) \right] \quad (9)$$

将  $z=l_1$  代入式(6), 可得第 2 土层下边界的基质吸力为:

$$\psi^2(l_1) = \gamma_w l_1 - \frac{1}{\alpha_2} \cdot \ln \left[ C_2 - \frac{q}{k_{s2}} \cdot \exp(\alpha_2 \gamma_w l_1) \right] \quad (10)$$

式中:  $C_2$ —第 2 土层的待定系数;

$k_{s2}$ —第 2 土层的渗透系数/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$\alpha_2$ —第 2 土层的参数/ $\text{kPa}^{-1}$ 。

依据土层界面连续性条件, 联立求解式(9)与式

(10), 可得:

$$C_2 = \left[ 1 + \frac{q}{k_{s1}} - \frac{q}{k_{s1}} \cdot \exp(\alpha_1 \gamma_w l_1) \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \frac{q}{k_{s2}} \cdot \exp(\alpha_2 \gamma_w l_1) = \left[ C_1 - \frac{q}{k_{s1}} \cdot \exp(\alpha_1 \gamma_w l_1) \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \frac{q}{k_{s2}} \cdot \exp(\alpha_2 \gamma_w l_1) \quad (11)$$

将式(11)代入式(6), 可得:

$$\psi^2 = \gamma_w z - \frac{1}{\alpha_2} \cdot \ln \left\{ \left[ 1 + \frac{q}{k_{s1}} - \frac{q}{k_{s1}} \cdot \exp(\alpha_1 \gamma_w l_1) \right]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \frac{q}{k_{s2}} \cdot \exp(\alpha_2 \gamma_w l_1) - \frac{q}{k_{s2}} \cdot \exp(\alpha_2 \gamma_w z) \right\} \quad (12)$$

依据数学归纳思想, 可得待定系数  $C_i$  的表达式为:

$$C_i = \left[ C_{i-1} - \frac{q}{k_{s(i-1)}} \cdot \exp(\gamma_w \alpha_{i-1} \sum_1^{i-1} l_j) \right]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}} + \frac{q}{k_{si}} \cdot \exp \left( \gamma_w \alpha_i \sum_1^{i-1} l_j \right) \quad (13)$$

式中:  $k_{s(i-1)}$ —第  $i-1$  土层的渗透系数/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$k_{si}$ —第  $i$  土层的渗透系数/( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ );

$\alpha_{i-1}$ —第  $i-1$  土层的参数/ $\text{kPa}^{-1}$ ;

$\alpha_i$ —第  $i$  土层的参数/ $\text{kPa}^{-1}$ 。

根据式(6), 可得第  $i$  土层的基质吸力为:

$$\psi^i(z) = \gamma_w z - \frac{1}{\alpha_i} \cdot \ln \left[ C_i - \frac{q}{k_{si}} \cdot \exp(\alpha_i \gamma_w z) \right] \quad (14)$$

### 1.3 成层土有效饱和度的解析表达式

有效饱和度是评价非饱和土含水率的重要指标, 土-水特征曲线可以建立含水率与基质吸力之间的关系。其中, VG 模型<sup>[29]</sup>应用较为广泛, 有效饱和度( $S_e$ )与基质吸力之间的关系为:

$$S_e = \frac{S - S_r}{1 - S_r} = \left\{ \frac{1}{1 + (\alpha \cdot \psi)^n} \right\}^{1 - \frac{1}{n}} \quad (15)$$

式中:  $n$ —模型的经验拟合参数;

$S$ —饱和度;

$S_r$ —残余饱和度。

将式(14)代入式(15)可知, 成层土体第  $i$  土层的有效饱和度的解析表达式为:

$$S_e^i = \frac{S^i - S_r^i}{1 - S_r^i} = \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \alpha_i \gamma_w z - \ln \left[ C_i - \frac{q}{k_{si}} \cdot \exp(\alpha_i \gamma_w z) \right] \right\}^{n_i}} \right\}^{1 - \frac{1}{n_i}} \quad (16)$$

式中:  $n_i$ —第  $i$  土层的拟合参数。

### 1.4 成层土吸应力的解析表达式

Vanapalli 等<sup>[30]</sup>基于 Escario 等<sup>[31]</sup>的抗剪强度试验数据深入分析, 提出有效应力参数  $\chi$  的数学表达式并对其有效性进行验证。其具体表达式如下:

$$\chi = \left( \frac{S - S_r}{1 - S_r} \right)^\kappa \quad (17)$$

式中:  $\kappa$ —拟合参数。

研究表明<sup>[30]</sup>, 当基质吸力取值在  $0 \sim 1500 \text{ kPa}$  且  $\kappa=1$  时, 式(17)与试验数据具有较高的一致性。

于是, 联立式(16)和式(17), 可得:

$$\chi^i = \left\{ \frac{1}{1 + \left\{ \alpha_i \gamma_w z - \ln \left[ C_i - \frac{q}{k_{si}} \cdot \exp(\alpha_i \gamma_w z) \right] \right\}^{n_i}} \right\}^{1 - \frac{1}{n_i}} \quad (18)$$

吸应力( $\delta_s$ )的绝对值取决于有效应力参数与基质吸力的大小<sup>[32-33]</sup>。根据式(14)与式(18)可得第  $i$  土层吸应力的表达式:

$$\delta_s^i = \chi^i \cdot \psi^i = \frac{\gamma_w z - \frac{1}{\alpha_i} \cdot \ln \left[ C_i - \frac{q}{k_{si}} \cdot \exp(\alpha_i \gamma_w z) \right]}{\left\{ 1 + \left[ \alpha_i \gamma_w z - \ln \left( C_i - \frac{q}{k_{si}} \cdot \exp(\alpha_i \gamma_w z) \right) \right]^{n_i} \right\}^{1 - \frac{1}{n_i}}} \quad (19)$$

## 2 解析方法的验证

### 2.1 参数取值

取  $10 \text{ m}$  厚的均质土层为研究对象, 其中  $q > 0$  表示蒸发,  $q < 0$  表示入渗, 选用常见的入渗速率和蒸发速率进行分析。取地下水位为  $z=0$  处, 该处的基质吸力  $\psi=0$ , 饱和渗透系数、土水特征曲线的拟合系数  $\alpha$ 、 $n$  等参数引自文献<sup>[29]</sup>, 具体数值见表 1。

表 1 砂土、粉土与黏土的典型参数

Table 1 Typical parameters of sandy, powdery and clayey soils

土的类型	$n$	$\alpha/\text{kPa}^{-1}$	$k_s/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
砂土	5.0	0.100	$3 \times 10^{-5}$
粉土	4.0	0.010	$1 \times 10^{-7}$
黏土	2.0	0.005	$5 \times 10^{-8}$

### 2.2 验证与讨论

土层的基质吸力表达式由式(14)确定。需注意的是, 由对数函数定义域的限制, 可得如下关系式:

$$1 + \frac{q}{k_s} - \frac{q}{k_s} \cdot \exp(\alpha \gamma_w z) > 0 \quad (20)$$

于是当  $q > 0$  时, 土层厚度有如下限制性条件:

$$z < \frac{\ln\left(1 + \frac{k_s}{q}\right)}{\alpha\gamma_w} \quad (21)$$

使用 COMSOL 数值分析平台计算稳定状态下的砂土、粉土和黏土 3 种典型土体的基质吸力垂直分布, 并使用拟合优度  $R^2$  对数值解与解析解数据之间的偏差度进行评估以验证本文解析算法的有效性。

根据拟合优度数值的定义可知,  $R^2$  的值越接近 1, 表明数值解的精度越高。依据表 2 中针对 3 类土体基质吸力解析解和数值解计算的  $R^2$ , 表明本文的解析方法具有较高的可信度。

图 2 给出了稳定渗流下 3 种典型土体的基质吸力沿高程的分布图。从图 2(a)可知, 在砂质土层的 0~4 m 范围内渗流速率的不同对基质吸力的分布影响较小(基质吸力曲线几乎重合);在距离地下水位 4 m 处, 渗流速率的变化对基质吸力分布的影响逐渐变大, 并

表 2 解析方法的拟合优度  $R^2$   
Table 2 Goodness of fit  $R^2$  of analytical method

拟合优度	渗流速率/(m·s <sup>-1</sup> )	$R^2$		
		砂土	粉土	黏土
计算值	$-3.14 \times 10^{-8}$	1.000	0.977	1.000
	$-3.14 \times 10^{-9}$	1.000	0.996	1.000
	0	1.000	1.000	1.000
	$1.15 \times 10^{-9}$	1.000	0.999	0.997
	$1.15 \times 10^{-8}$	1.000	0.987	0.977

随着与地下水位间距离的增大而增加;此外, 蒸发可极大的增加表层土体基质吸力。由图 2(b)可见, 渗流速率的变化对粉土层基质吸力分布所产生的影响体现在整个土层范围内;同时可知, 无论入渗还是蒸发状态, 基质吸力沿高程变化均近乎呈现为线性特征。类似变化趋势亦出现在黏土层, 如图 2(c)所示。

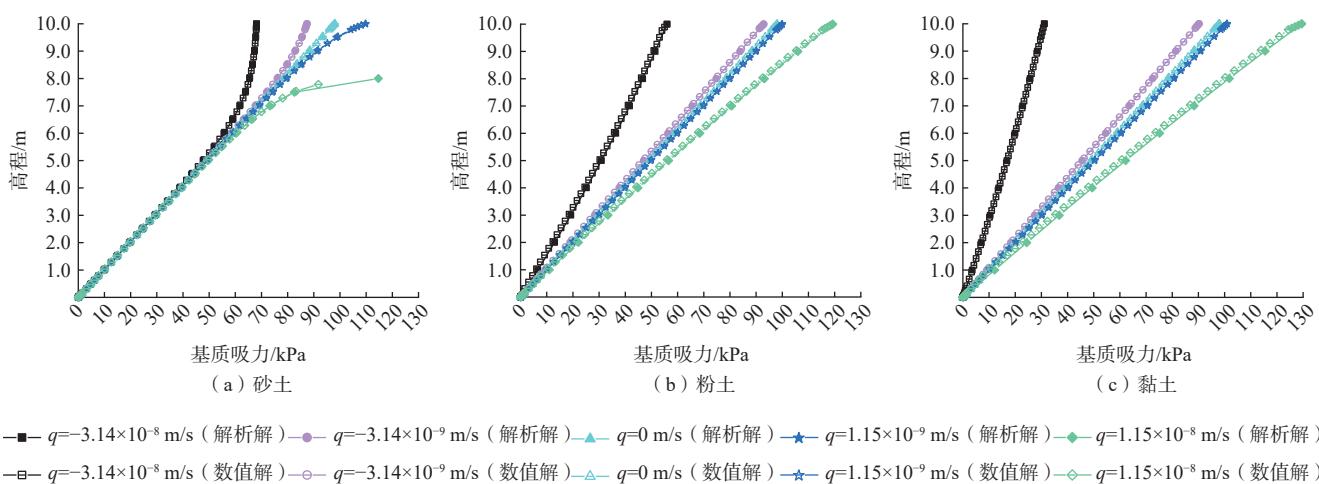


图 2 稳定状态下各类土层的基质吸力分布特征

Fig. 2 Characteristics of matric suction distribution of various soil layers under steady state

在相同渗流条件下不同类型土体的基质吸力分布特征如图 3 所示。可见, 入渗条件下相同高程处砂土的基质吸力最大, 粉土次之, 黏土最小;而蒸发条件下  $z=7.5$  m 以下相同高度处黏土的基质吸力最大, 粉土次之, 砂土最小;蒸发条件下高程大于 7.5 m 后的砂土基质吸力值迅速增大。

### 3 分析和讨论

#### 3.1 单层土

##### 3.1.1 有效饱和度

图 4 给出了砂土、粉土和黏土 3 类典型土层在稳定渗流状态下有效饱和度沿高程的分布特征。可见, 砂土层有效饱和度对渗流速率的变化并不敏感但

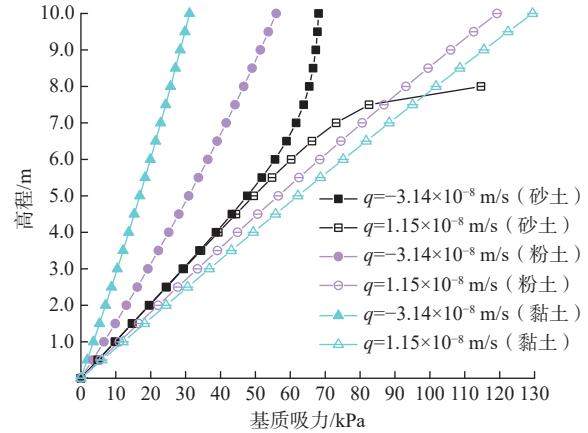


图 3 相同稳定渗流状态下各类土层的基质吸力分布对比

Fig. 3 Comparison of matric suction distribution in the various soil layers under the same steady seepage condition

是其沿高程的变化较为显著; 距离地下水位约 3 m 处有效饱和度趋近为 0, 表明此类土层的毛细上升高度约 3 m 左右。由图 4(b)(c) 可知, 粉土和黏土的有效饱和度随高程增大而减小, 然而相对砂土而言其

减小幅度有限; 此外可以看出蒸发时有效饱和度的降低幅值较大, 而入渗时其幅值改变较小; 相对黏土而言, 粉土有效饱和度变化受渗流速率变化的影响较明显。

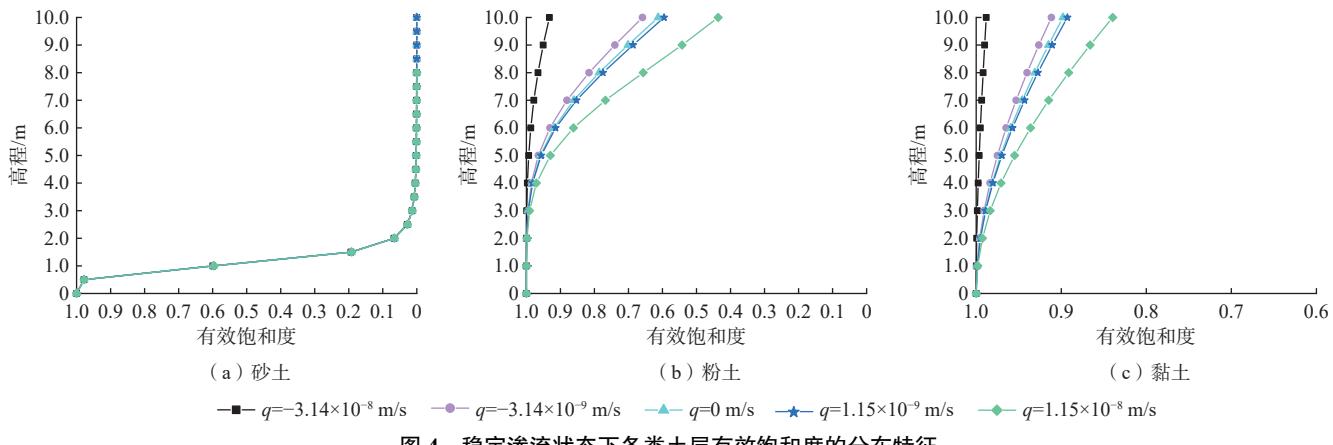


图 4 稳定渗流状态下各类土层有效饱和度的分布特征

Fig. 4 Distribution characteristics of effective saturation in the various soil layers under stable seepage condition

### 3.1.2 吸应力

图 5 给出了稳定渗流状态下典型的砂土、粉土和黏土层的吸应力沿高程的变化特征。可见, 砂土吸应力沿高程呈现为先增加后减小, 约在  $z=1$  m 处达到峰值(约为 5.86 kPa), 而后迅速降低为 0; 渗流速率的改变对砂土吸应力分布的影响可忽略。然而, 粉土和

黏土的吸应力分布曲线受渗流速率变化的影响显著且在相同稳定渗流情况下其吸应力峰值远大于砂土。粉土中的吸应力沿高程变化在较大入渗速率时表现为线性, 而在较小入渗速率和蒸发情形下则表现为先增加后减小; 黏土层中的吸应力则均近乎为线性增长。

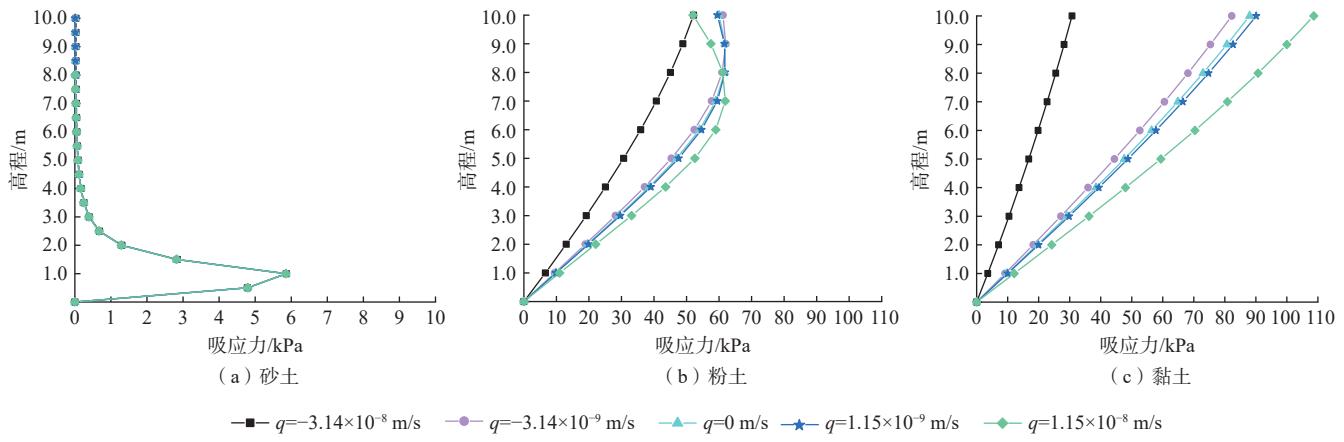


图 5 稳定渗流状态下各类土层的吸应力分布特征

Fig. 5 Characteristics of suction stress distribution in various soil layers under stable seepage condition

### 3.2 双层构造土体

2 层分布的均质成层土, 每层厚各 5 m, 总厚为 10 m, 地下水位处  $z=0$ 。3 种土层分布情况分别为: (a) 0 ~ 5 m 为砂土, 5 ~ 10 m 为黏土; (b) 0 ~ 5 m 为粉土, 5 ~ 10 m 为黏土; (c) 0 ~ 5 m 为砂土, 5 ~ 10 m 为粉

土。计算模型如图 6 所示。

#### 3.2.1 基质吸力

图 7 给出了稳定渗流状态下 3 种常见的非饱和双层土体基质吸力沿高程的分布特征及土层界面的存在对基质吸力演变特征的影响。可见, 稳定渗流下土

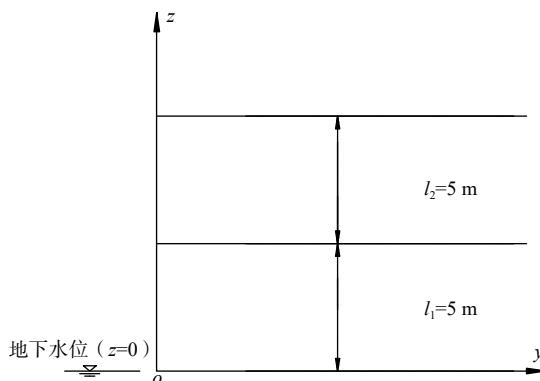


图 6 双层土模型示意图

Fig. 6 Schematic diagram of double-layered soil model

层中基质吸力随着高程增加而逐渐增大。土层界面的存在会影响基质吸力的增长速率,其中入渗状态下基质吸力的增长速率明显降低,而蒸发状态下其增长速率则得到有效提升。从图 7(b)(c)可以看出,在砂土层内渗流速率的不同对基质吸力分布所产生的影响极小,在细颗粒的黏土和粉土层内渗流速率的不同

显著影响基质吸力的分布。

### 3.2.2 有效饱和度

图 8 为 3 种常见的非饱和土双层构造下有效饱和度沿高程的分布特征,并给出了土层界面对有效饱和度变化规律的影响。可见,稳定渗流下有效饱和度沿高程的分布曲线在土层界面处均有突变,而黏土-粉土界面处的突变则相对较小,其中在  $q=-3.14 \times 10^{-9} \text{ m/s}$  的稳定入渗条件下的突变(仅为 0.0049)可忽略不计;计算表明在黏土-粉土双层构造下的蒸发速率越大,土层界面处有效饱和度的突变量越大。从图 8(b)(c)可知,砂土层内有效饱和度随高程增加而骤减,并在土层界面附近下趋近于 0,而后在土层分界处发生极为显著的突变。此外,双层构造的非饱和土层中,渗流速率的变化对有效饱和度的影响在粉土层中最为显著,在砂土层中的影响最小。

### 3.2.3 吸应力

图 9 为 3 种常见的非饱和土双层构造情况下吸应

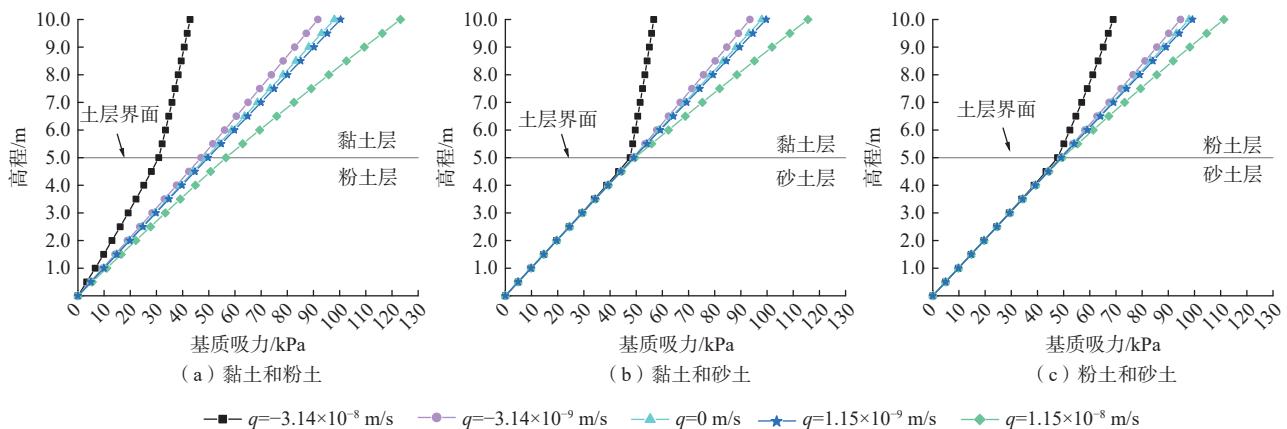


图 7 稳定渗流状态下双层土的基质吸力分布特征

Fig. 7 Characteristics of matric suction distribution in the double-layered soil under stable seepage condition

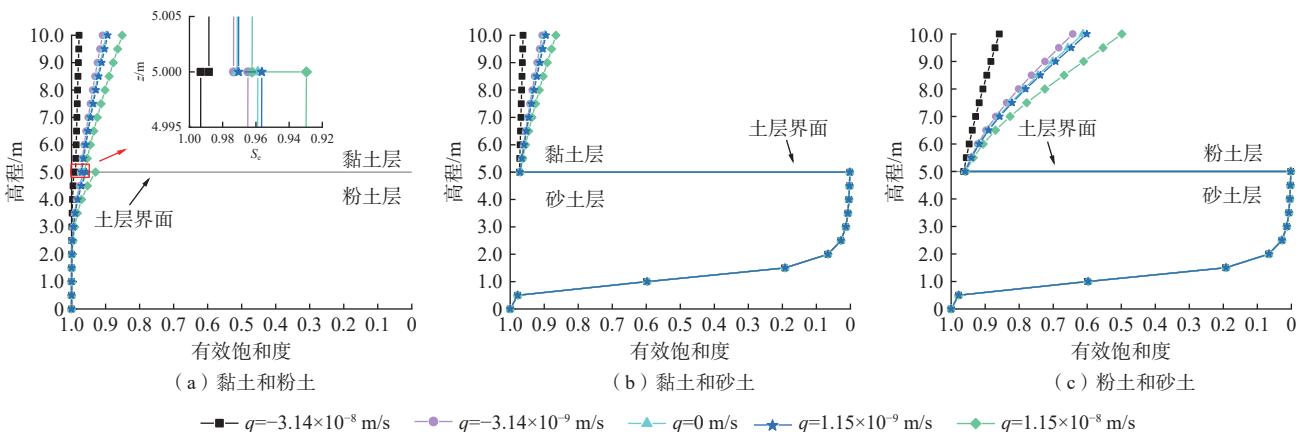


图 8 稳定渗流状态下双层土有效饱和度的分布特征

Fig. 8 Characteristics of the distribution of effective saturation in the bilayer soil under stable seepage condition

力沿高程的分布特征。由图9(a)可见, 黏土-粉土双层构造下吸应力曲线沿高程分布的突变量可忽略不计。然而, 入渗状态下黏土层中的吸应力增长速率低于粉土层中吸应力的增长速率, 蒸发状态下则恰好相反。由图9(b)(c)可见, 在土层界面处吸应力均存在

较显著的突变, 砂土层中的吸应力在高程上的变化表现为先增大后减小, 且峰值均出现在 $z=1$  m处附近(最大峰值约为6 kPa)。图9(b)黏土层中的吸应力始终近乎线性增长, 而图9(c)粉土层中的吸应力在入渗速率较小及蒸发情况下呈现出先增加后减小的形态。

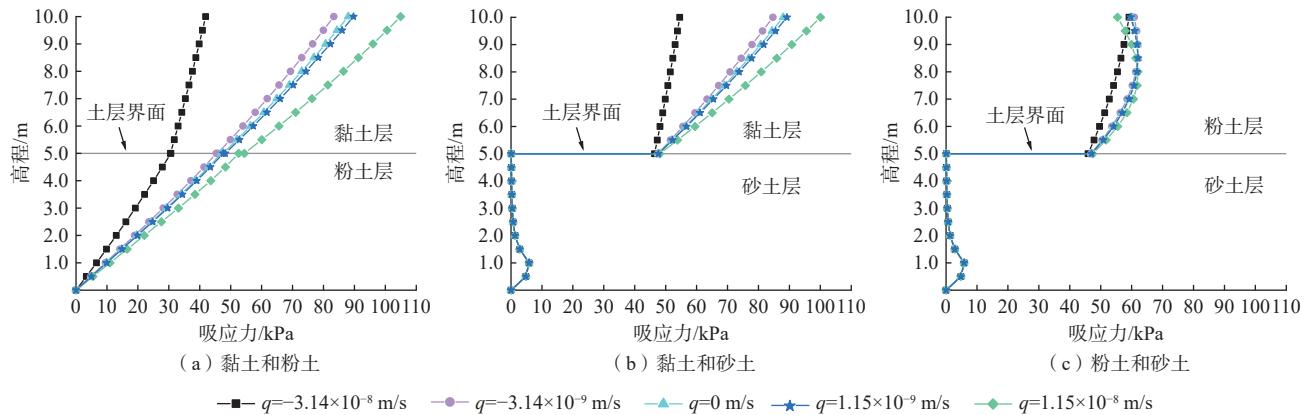


图9 稳定渗流状态下双层土的吸应力分布特征

Fig. 9 Characteristics of suction stress distribution in the double-layered soils under stable seepage

#### 4 参数敏感度分析

选取10 m厚粉土为研究对象, 取 $z=0$ 为地下水位处, 该处 $\psi=0$ 。渗流速率取 $q=-3.14\times10^{-8}$  m/s,  $\gamma_w=9.8$  kN/m<sup>3</sup>,  $n=4.0$ , 参数 $\alpha_1=0.01$  kPa<sup>-1</sup>,  $\alpha_2=0.012$  kPa<sup>-1</sup>,  $\alpha_3=0.014$  kPa<sup>-1</sup>,  $\alpha_4=0.016$  kPa<sup>-1</sup>, 饱和渗透系数 $k_s=1.0\times10^{-7}$  m/s,  $k_{s2}=1.2\times10^{-7}$  m/s,  $k_{s3}=1.4\times10^{-7}$  m/s,  $k_{s4}=1.6\times10^{-7}$  m/s, 分析参数 $\alpha$ 与饱和渗透系数 $k_s$ 的变化对基质吸力、有效饱和度以及吸应力垂直分布的影响。

##### 4.1 参数取值对基质吸力分布的影响分析

图10给出了参数 $\alpha$ 与 $k_s$ 的取值对基质吸力沿高程分布的影响。在图10(a)所对应的解析解中除 $\alpha$ 取值不同外, 其余计算参数取值均相同, 可见, 在靠近地下水位处, 4条曲线的基质吸力随高程变化区别不明显, 随着高程增加,  $\alpha$ 取值的不同对基质吸力增长速率的影响逐渐明显, 在地表处基质吸力差值可达7.01 kPa。总体而言, 相同高程处 $\alpha$ 取值小的曲线所对应的基质吸力值大。在图10(b)中除 $k_s$ 取值不同外, 其余计算参数取值均相同, 可见, 4条曲线的变化趋势相同,  $k_s$ 取值对基质吸力增长速率的影响较为明显, 在地表处基质吸力差值为13.78 kPa,  $k_s$ 取值越小, 所对应的基质吸力的增长速率越慢。

##### 4.2 参数取值对有效饱和度分布的影响分析

图11为参数 $\alpha$ 与 $k_s$ 的取值对有效饱和度沿高程分布的影响。在图11(a)所对应的解析解中除 $\alpha$ 取值

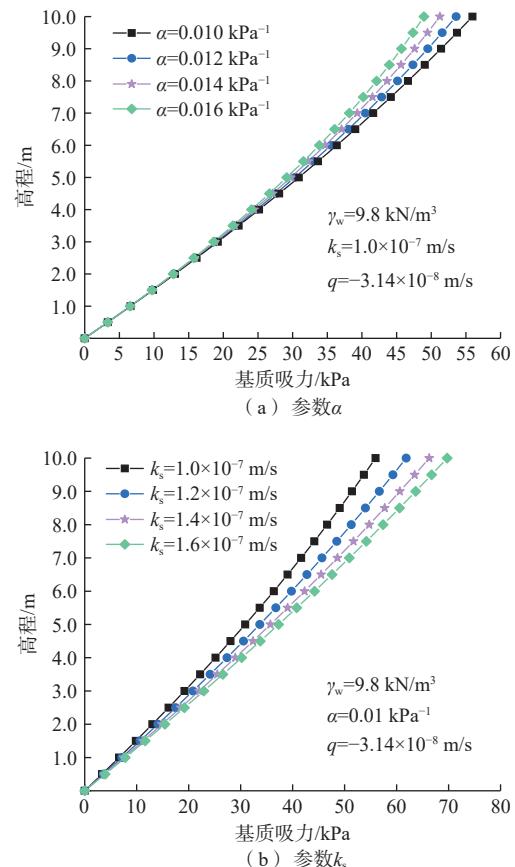


图10 参数对基质吸力沿高程分布的影响分析

Fig. 10 Analysis of the effect of parameters on the distribution of matric suction along the elevation

不同外,其余计算参数取值均相同,可见,随着高程增加,有效饱和度均减小,  $\alpha$  取值的不同对于有效饱和度降低速率的影响较为明显,在地表处差值为 0.145,其中  $\alpha$  取较小值的曲线所对应的有效饱和度值大;受地下水位影响其附近的有效饱和度无论  $\alpha$  取何值均大致相同。在图 11(b)中除  $k_s$  取值不同外,其余计算参数取值均相同,可见,在地表处有效饱和度差值为 0.079,  $k_s$  取值小的曲线所对应的有效饱和度大。此外,  $\alpha$  与  $k_s$  均会影响有效饱和度的降低速率,与  $\alpha$  相比,  $k_s$  值的增加对于有效饱和度的降低影响较弱;土层的  $\alpha$  与  $k_s$  取值越小,其所对应的有效饱和度降低速率越慢,地表处所对应的有效饱和度数值越大。

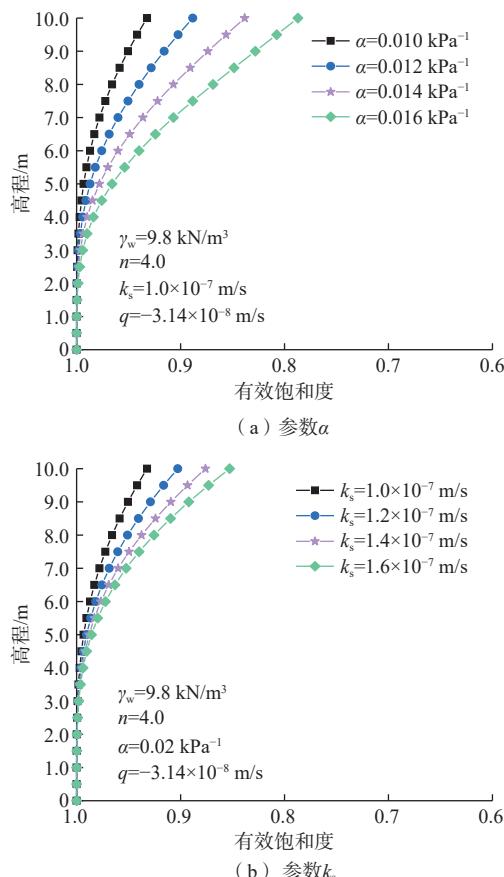


图 11 参数对有效饱和度沿高程分布的影响分析

Fig. 11 Analysis of the effect of parameters on the distribution of effective saturation along the elevation

### 4.3 参数取值对吸应力分布的影响分析

图 12 描述了参数  $\alpha$  与  $k_s$  的取值对吸应力沿高程分布的影响。图 12(a)中除  $\alpha$  取值不同外,其余计算参数取值均相同,可见,随着高程增加,吸应力均逐渐增加,在靠近地下水位的地方,  $\alpha$  取值的不同对于吸应力的增加速率影响不明显,而在距离地下水位 4 m 高

度处,曲线开始逐渐分离,在地表处差值为 13.64 kPa,  $\alpha$  取值小的曲线所对应的吸应力值大。在图 12(b)中除  $k_s$  取值不同外,其余计算参数取值均相同,可见,随着  $k_s$  取值的增大,吸应力沿高程分布也增大,在地表处差值为 7.31 kPa。此外,  $\alpha$  取值越小、  $k_s$  取值越大,在地表处所对应的吸应力数值越大。

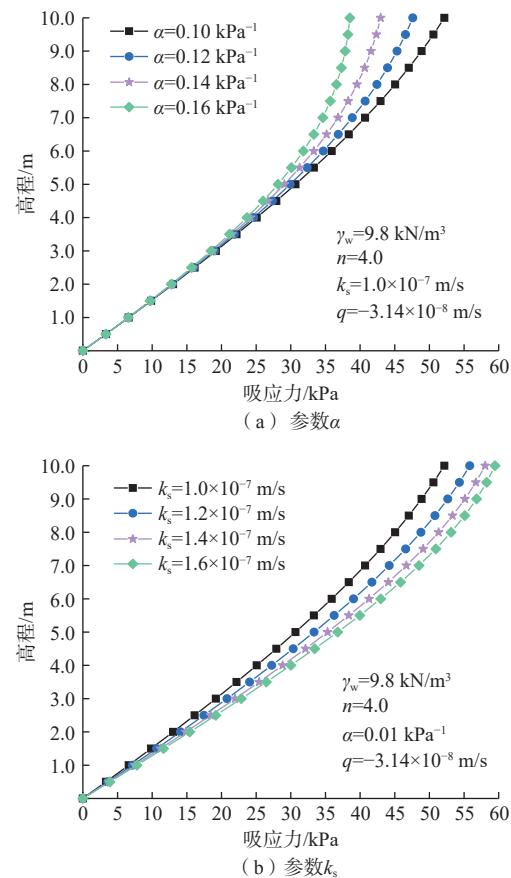


图 12 参数对吸应力沿高程分布的影响分析

Fig. 12 Analysis of the effect of parameters on the distribution of suction stress along the elevation

## 5 结论

基于分离变量技术和数学归纳思想,实现了非饱和成层土稳态渗流过程的解析求解,且数值验证表明解析算法具有较高的可信度。主要结论如下:

(1) 相同入渗条件下相同高程处砂土基质吸力最大,黏土最小;渗流速率的不同对粉土层有效饱和度分布影响最大,砂土最小;砂土层有效饱和度沿高程变化最显著;黏土层中吸应力近乎线性增长,砂土的吸应力则沿高程先增大后减小。

(2) 土层界面的存在会影响基质吸力沿高程的增长速率。涉及有砂土层存在的双层构造土体,其土层

界面处的有效饱和度和吸应力均会发生显著突变。蒸发速率越大, 黏-粉土构造土体在其界面处的有效饱和度突变量越大, 而其吸应力的突变量可忽略不计。

(3) Gardner 模型参数  $\alpha$  值越小, 相同高程处基质吸力值大; 饱和土  $k_s$  值越小, 基质吸力增长速率越慢。 $\alpha$  与  $k_s$  取值越小, 有效饱和度降低速率越慢, 地表处的有效饱和度数值越大;  $\alpha$  值越小或  $k_s$  取值越大, 地表处对应的吸应力值越大。

### 参考文献 (References) :

- [ 1 ] BAI Bing, ZHOU Rui, CAI Guoqing, et al. Coupled thermo-hydro-mechanical mechanism in view of the soil particle rearrangement of granular thermodynamics [J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, 137: 104272.
- [ 2 ] 刘宗宾, 李超, 路研, 等. 基于孔隙结构表征的低渗透砂岩流体赋存特征及渗透率评价 [J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2024, 54(4): 1124 – 1136. [ LIU Zongbin, LI Chao, LU Yan et al. Fluid Occurrence State and Permeability Evaluation of Low-Permeability Sandstone Based on Pore Structure Characterization [J]. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2024, 54 (4): 1124 – 1136. (in Chinese with English abstract) ]
- [ 3 ] 刘亚玲, 黎广荣, 周义朋, 等. 新疆 512 矿床砂岩型铀矿孔隙特征及渗流模拟 [J]. 地质科技通报, 2024, 43(4): 205 – 218. [ LIU Yaling, LI Guangrong, ZHOU Yipeng, et al. Pore characteristics and seepage simulation of sandstone-type uranium ore in the 512 deposit, Xinjiang [J]. *Bulletin of Geological Science and Technology*, 2024, 43(4): 205 – 218. (in Chinese with English abstract) ]
- [ 4 ] SUN Guanhua, WANG Wei, SHI Lu. Steady seepage analysis in soil-rock-mixture slope using the numerical manifold method [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2021, 131: 27 – 40.
- [ 5 ] 余岱金, 黄强兵, 康孝森, 等. 黄土填方边坡界面渗流破坏机制模型试验研究 [J]. 水文地质工程地质, 2022, 49(5): 119 – 128. [ YU Daijin, HUANG Qiangbing, KANG Xiaosen, et al. A model test study of the interface seepage and failure mechanism of loess-filled slope [J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2022, 49(5): 119 – 128. (in Chinese with English abstract) ]
- [ 6 ] 饶鸿, 王金淑, 赵志明, 等. 基于有限元软件自定义本构模型的膨胀土边坡降雨入渗分析 [J]. 水文地质工程地质, 2021, 48(1): 154 – 162. [ RAO Hong, WANG Jinshu, ZHAO Zhiming, et al. An analysis of rainfall infiltration of expansive soil slope based on the finite element software custom constitutive model [J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2021, 48(1): 154 – 162. (in Chinese with English abstract) ]
- [ 7 ] 陈亮胜, 韦秉旭, 廖欢, 等. 膨胀土边坡非饱和渗流及渐进性破坏耦合分析 [J]. 水文地质工程地质, 2020, 47(4): 132 – 140. [ CHEN Liangsheng, WEI Bingxu, LIAO Huan, et al. A coupling analysis of unsaturated seepage and progressive failure of an expansive soil slope [J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2020, 47(4): 132 – 140. (in Chinese with English abstract) ]
- [ 8 ] CHEN Fen, ZHENG Bin, LIN Ji, et al. Numerical Solution of Steady-State Free Boundary Problems using the Singular Boundary Method [J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 13(1): 163 – 175.
- [ 9 ] CHAPUIS R P. Steady state groundwater seepage in sloping unconfined aquifers [J]. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 2011, 70(1): 89 – 99.
- [ 10 ] ZHAI Yulong, LI Li, CHAPUIS R P. Analytical, numerical and experimental studies on steady-state seepage through 3D rockfill trapezoidal dikes [J]. *Mine Water and the Environment*, 2021, 40(4): 931 – 942.
- [ 11 ] REMAR J, BRUCH Jr J, SLOSS J. Numerical solutions to some free surface flows through nonhomogeneous media [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984, 20(1): 143 – 167.
- [ 12 ] GRIFFITHS D, LU N. Unsaturated slope stability analysis with steady infiltration or evaporation using elasto-plastic finite elements [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2005, 29(3): 249 – 267.
- [ 13 ] ZHAN T L, NG C W. Analytical analysis of rainfall infiltration mechanism in unsaturated soils [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2004, 4(4): 273 – 284.
- [ 14 ] LU Zhiming, ZHANG Dongxiao. Analytical solutions to steady state unsaturated flow in layered, randomly heterogeneous soils via Kirchhoff transformation [J]. *Advances in Water Resources*, 2004, 27(8): 775 – 784.
- [ 15 ] TRACY F T. 1-D, 2-D, and 3-D analytical solutions of unsaturated flow in groundwater [J]. *Journal of Hydrology*, 1995, 179: 199 – 214.
- [ 16 ] ANDERSSON J, SHAPIRO A M. Stochastic analysis of one-dimensional steady state unsaturated flow: A comparison of monte carlo and perturbation methods [J]. *Water Resources Research*, 1983, 19(1): 121 – 133.
- [ 17 ] HOPMANS J, SCHUKKING H, TORFS P. Two-

- dimensional steady state unsaturated water flow in heterogeneous soils with autocorrelated soil hydraulic properties[J]. *Water Resources Research*, 1988, 24(12): 2005 – 2017.
- [18] LU Zhiming, NEUMAN S P, GUADAGNINI A, et al. Conditional moment analysis of steady state unsaturated flow in bounded, randomly heterogeneous soils[J]. *Water Resources Research*, 2002, 38(4): 1038.
- [19] ZHU Jianting, MOHANTY B P. Analytical solutions for steady state vertical infiltration[J]. *Water Resources Research*, 2002, 38(8): 1145.
- [20] ROCKHOLD M L, SIMMONS C S, FAYER M J. An analytical solution technique for one-dimensional, steady vertical water flow in layered soils[J]. *Water Resources Research*, 1997, 33(4): 897 – 902.
- [21] ZHAI Qian, YE Weimin, RAHARDJO H , et al. Estimation of the hydraulic conductivity of unsaturated soil incorporating the film flow[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2022, 59 (9): 1679 – 1684.
- [22] ZHAI Qian, YE Weimin, RAHARDJO H , et al. Theoretical method for the estimation of vapour conductivity for unsaturated soil[J]. *Engineering Geology*, 2021, 295: 1 – 6.
- [23] SRIVASTAVA R, YEH T C J. Analytical solutions for one - dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils[J]. *Water Resources Research*, 1991, 27(5): 753 – 762.
- [24] 吴礼舟, 张利民, 黄润秋. 成层非饱和土渗流的耦合解析解 [J]. 岩土力学, 2011, 32(8): 2391 – 2396. [ WU Lizhou, ZHANG Limin, HUANG Runqiu. Analytic solution to coupled seepage in layered unsaturated soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, 32(8): 2391 – 2396. (in Chinese with English abstract) ]
- [25] SORAGANVI V S, ABABOU R, KUMAR M M. Effective flow and transport properties of heterogeneous unsaturated soils[J]. *Advances in Water Resources*, 2020, 143: 1 – 22.
- [26] GARDNER W. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. *Soil Science*, 1958, 85(4): 228 – 232.
- [27] ZHANG Zaiyong, WANG Wenke, GONG Chengcheng, et al. Finite analytic method: Analysis of one-dimensional vertical unsaturated flow in layered soils[J]. *Journal of Hydrology*, 2021, 597: 1 – 9.
- [28] YEH T C J. One - dimensional steady state infiltration in heterogeneous soils[J]. *Water Resources Research*, 1989, 25(10): 2149 – 2158.
- [29] LU Ning, GRIFFITHS D. Profiles of steady-state suction stress in unsaturated soils[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2004, 130(10): 1063 – 1076.
- [30] VANAPALLI S K, FREDLUND D G. Comparison of different procedures to predict unsaturated soil shear strength[C]//*Advances in Unsaturated Geotechnics*. Denver, Colorado, USA. Reston, VA: American Society of Civil Engineers, 2000: 195 – 209.
- [31] ESCARIO V, JUCA J F T. Strength and deformation of partly saturated soils[C]//*Proceedings of the 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, 1990: 43 – 46.
- [32] ABDOLLAHI M, VAHEDIFARD F. Model for lateral swelling pressure in unsaturated expansive soils[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2021, 147(10): 04021096.
- [33] GU Tianfeng, WANG Jiading, WANG Chenxing, et al. Experimental study of the shear strength of soil from the Heifangtai Platform of the Loess Plateau of China[J]. *Journal of Soils and Sediments*, 2019, 19(10): 3463 – 3475.

编辑: 刘真真