

基于尖点突变模型确定静载试验的基桩极限承载力

阳吉宝

Determination of ultimate bearing capacity of pile under static load test based on cusp catastrophe model

YANG Jibao

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202308052>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于尖点突变理论的软岩弃渣路堤局部稳定性分析

An analysis of local stability of soft rock cinder embankment based on the cusp catastrophe theory

鞠兴华, 杨晓华, 张莎莎 水文地质工程地质. 2019, 46(6): 112-118

斜坡浅埋水平条形锚板抗拔承载力的极限分析

A limit analysis of the ultimate pullout capacity of a shallow horizontal strip anchor plate embedded in slope

黄明华, 李盾, 李嘉成 水文地质工程地质. 2019, 46(1): 116-116

基于区间非概率可靠性方法的岩溶区桩基下溶洞顶板稳定性评价

Stability evaluation of karst cave roof under pile in karst areas based on the interval non-probabilistic reliability method

秦溯, 李云安, 孙琳 水文地质工程地质. 2019, 46(5): 81-88

预应力锚索修复含微裂纹抗滑桩模型试验研究

Model test of anti-slide pile with micro-crack repaired by prestressed anchor cables

周云涛, 石胜伟, 蔡强, 张勇, 李乾坤, 梁炯, 程英建 水文地质工程地质. 2019, 46(4): 104-111

循环荷载下下伏空洞路面塌陷的模型试验研究

Model tests of road subsidence progress with underground cavities caused by cyclic dynamic load

高程鹏 水文地质工程地质. 2021, 48(1): 70-77

基于能量法的轴横向荷载作用下单桩受力变形分析

Deformation analysis of pile under combined axial and lateral loads by using the energy method

张玲, 陈金海, 欧强 水文地质工程地质. 2020, 47(5): 81-91



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

DOI: 10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202308052

阳吉宝. 基于尖点突变模型确定静载试验的基桩极限承载力[J]. 水文地质工程地质, 2024, 51(5): 114-123.

YANG Jibao. Determination of ultimate bearing capacity of pile under static load test based on cusp catastrophe model[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2024, 51(5): 114-123.

基于尖点突变模型确定静载试验的基桩极限承载力

阳吉宝

(上海市政工程设计研究总院(集团)有限公司, 上海 200092)

摘要: 利用静载试验的荷载-沉降曲线确定基桩极限承载力的分析方法很多,但至今尚未找到合理、有理论依据的确定基桩极限承载力的评判方法。因此,尝试利用尖点突变模型分析基桩静载试验的荷载-沉降曲线来评判基桩极限承载力;利用 Matlab 软件直接拟合静载试验的荷载-沉降曲线,以突变特征值为评价标准,确定基桩极限承载力。研究表明:(1)对比分析目前常用的尖点突变模型求解方法与文章提出的直接拟合法,发现目前常用的一般求解法存在不稳定性、误判等不足,评判结果与静载试验实际情形不符;(2)直接拟合法求得的势函数具有唯一性、首位性、单调性等特征,计算结果与基桩静载试验的实际情况相符,解决了一般求解法存在不稳定性、误判等问题,且比现行基桩检测规范计算结果更为安全。研究结果为较大直径基桩在缓变形情形下,以 0.05D 桩顶沉降量为标准确定基桩极限承载力提供了理论依据。

关键词: 尖点突变模型;基桩静载试验;荷载-沉降曲线;极限承载力;基桩稳定性评判

中图分类号: TU473.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-3665(2024)05-0114-10

Determination of ultimate bearing capacity of pile under static load test based on cusp catastrophe model

YANG Jibao

(Shanghai Municipal Engineering Design and Research Institute (Group) Co. Ltd., Shanghai 200092, China)

Abstract: There are many analysis methods to determine the ultimate bearing capacity of single pile by using the load-settlement curve obtained from the static load test, but so far, reasonable and theoretical calculation method to solve the ultimate bearing capacity of single pile has not been found. Therefore, the cusp catastrophe model was used to attempt to analyze the load-settlement curve obtained from the static load test so as to evaluate the ultimate bearing capacity of single pile. Through using Matlab software to directly fit the load-settlement curve obtained from the static load test with the evaluation standard of the sudden change characteristic value, the ultimate bearing capacity of the single pile was determined. The results show that: (1) comparing and analyzing the widely used methods for solving the cusp mutation model with the direct fitting method proposed in the present study, the widely used solution methods have shortcomings such as instability and misjudgment, and the evaluation results do not match the actual situation of static load tests. (2) The potential function obtained by direct fitting method is characterized by uniqueness, primacy, and monotonicity, whose calculation results are consistent with the actual situation of the static load test of the single pile. The direct fitting method solved the problems of instability and misjudgment existing in the general solution method. Compared to the current pile detection code, the calculation

收稿日期: 2023-08-18; 修订日期: 2023-11-14

投稿网址: www.swdgcgz.com

基金项目: 上海市地质学会科研项目(Dzxh202309)

作者简介: 阳吉宝(1964—),男,博士,教授级高级工程师,主要从事岩土和地质工程方面的科研工作。E-mail: yangjibao@smedi.com

results from direct fitting method are safer. The direct fitting method presented in this study provides a theoretical basis for determining the ultimate bearing capacity of larger diameter piles under slow deformation conditions using $0.05D$ of pile top settlement as the standard.

Keywords: cusp catastrophe model; pile static load test; load-settlement curve; ultimate bearing capacity; stability evaluation of pile

尽管基桩的静载试验设备复杂、试验工期较长,但到目前为止,仍被岩土工程界认为是确定单桩极限承载力最直接、最可靠的方法^[1-5]。因此,利用静载荷试验曲线确定基桩极限承载力仍被桩基工程设计所采用,而且被吸收进入各类规范、技术标准^[6]。通过静载试验,均可获得 3 个基本参数,即荷载(Q)、时间(t)、桩顶沉降量(s)。据此,可以绘出 Q - s , s - $\lg Q$, s - $\lg t$, $\lg s$ - $\lg Q$ 等关系曲线,从而根据各曲线的特征、地质条件、施工工艺等,综合判定基桩的极限承载力。《建筑基桩检测技术规范》(JGJ 106—2014)^[6]对通过静载试验确定“基桩竖向抗压极限承载力”有明确规定,但在实际工程中往往会产生困惑,特别是遇到静载试验的荷载-沉降曲线后半段出现缓变形、斜率变小等复杂情况,如何客观反映基桩受力性状,评价和确定基桩极限承载力需要结合工程实践开展进一步的理论研究工作。

突变理论^[7-8]是法国数学家 Thom 于 1972 年提出的一种非线性理论,它主要以拓扑学、结构稳定性理论等为研究基础,描述自然界连续性的量变演变为跳跃式质变的过程,根据拓扑数学理论提出判别突变、飞跃的原则:在严格限制条件下,如果质变过程中所经历的中间状态是稳定的,那么它就是一个渐变过程,因而特别适用于对内部作用未知的系统进行研究。经过托姆(Thom)、齐曼(Zeeman)、阿尔诺特(Arnold)等人^[7-8]的开创性工作,突变理论的应用已遍及物理、机械、地质、水文等诸多领域。在确定基桩极限承载力应用方面,崔树琴等^[1]、王新泉等^[9]、张远芳等^[10]、贺广零^[11]在假定基桩为刚性体的条件下,根据功能增量原理推导出整个桩体在桩顶各个沉降量下的势能改变量,再利用抛物线等曲线模型拟合静载试验的 Q - s 曲线确定基桩发生突变的沉降量,从而利用尖点突变理论求得端承基桩的极限承载力。聂珊利等^[12]利用桩侧剪应力与桩身位移关系式求得摩擦桩在桩顶荷载作用下的势能改变,根据尖点突变模型确定发生突变时的临界位移,再求得摩擦桩的极限承载力,但这种方法所求的基桩极限承载力与静载试验结果相差较大。姚文娟等^[13-14]应用突变理论建立

了超长桩在竖向静荷载作用下的尖点突变模型,推导出超长桩的竖向极限承载力预测公式,在静力荷载分析的基础上,建立了横向动力稳定性的双尖点突变模型,对超长桩在横向简谐荷载作用下的稳定机理进行了研究。董天文等^[15]通过建立基桩承载力突变的临界条件、位移增量梯度与岩土材料剪应力的关系,根据有限元强度折减法所得的强度折减系数与岩土材料剪应力曲线确定基桩极限承载力的尖点突变条件,判定基桩极限承载力,理论研究成果与静载荷试验结果基本相符。解志等^[16]和刘建飞等^[17]将不同理论基础的尖点突变法和比能对比法结合起来分析基桩极限承载力,提高了计算结果可信度。张伟等^[18]利用尖点突变模型对筒形基础竖向承载力进行确定,所计算的结果较传统经验公式方法更为精准。童华炜等^[19]利用突变理论分析基坑土钉支护发生破坏的临界位移,为基坑土钉支护型式提供了位移变形控制标准。薛晓辉等^[20]利用尖点突变理论和 R/S 分析对基坑变形稳定性趋势进行分析,并据此提出加固措施,确保了基坑安全。梁冠亭等^[21]、龚先兵等^[22]利用尖点突变理论对岩溶地区嵌岩桩的溶洞顶板厚度、桥梁基桩的极限承载力进行研究,解决了岩溶地区嵌岩桩的设计与施工难题。另外,尖点突变理论已被广泛应用于岩土工程中的边坡稳定性评判^[23-26]、地质灾害易发性及危险性评价^[27-28]、地下洞室开挖稳定性分析^[29-30]等问题上,为解决复杂的岩土工程问题提供了一种有益的工具与方法。

目前,利用尖点突变理论分析确定基桩极限承载力均从基桩受力机理角度进行探讨,研究成果的准确性与假定的理论模型的合理性有较大关系。本文根据基桩静载荷试验的 Q - s 曲线直接拟合构建尖点突变模型势函数,再根据势函数发生突变的判据确定基桩破坏荷载,为根据静载试验 Q - s 曲线确定基桩极限承载力提供一种新的应用理论与计算方法。

1 尖点突变模型

突变理论的主要研究方法^[7-8]为:分析一种函数及其临界点的分类状态来研究函数在临界点附近不

连续变化特征,用势函数的“注存在”表示稳定,用“注消失”表示不稳定,形成自身的一套运算方法;通过选取的系统状态变量、控制变量,构建突变模型,并对模型进行求解。本文利用的尖点突变模型势函数由 1 个状态变量 x 和 2 个控制变量 u 、 v 所组成,其标准形式为:

$$U(x) = x^4 + ux^2 + vx \quad (1)$$

式中: x ——系统的状态变量;

u 、 v ——系统的主、次控制变量。

系统的平面状态满足 $U'(x) = 0$, $U'(x)$ 为 $U(x)$ 导数,该方程的几何图形是一个被称之为势函数的平衡超曲面 M (图 1),其曲面方程为:

$$4x^3 + ux + v = 0 \quad (2)$$

对式(2)进行求导,得到奇点方程,即奇点集 S :

$$12x^2 + 2u = 0 \quad (3)$$

突变点应同时满足式(2)(3),联立求得突变点同时满足的控制参数曲面,即分叉集 B :

$$B = 8u^3 + 27v^2 = 0 \quad (4)$$

图 1 的平面是一个有皱折的曲面,其水平面分别由 u 、 v 组成,而垂直轴用 x 坐标表示。根据坐标系的规定及式(4)的几何意义,式(4)表示在平面和曲面上有垂直切线的点所满足的条件(即临界点),它们的全体组成奇点集 S ,而 S 在控制参数(u , v)平面上的投影即为分叉集 B 。分叉集是一条半立方抛物线,在点 O 处有一个尖点,因此称为尖点突变。

根据稳定性分析,在平衡曲面上,曲面的顶叶和底叶是稳定的平衡状态。在曲面上,任一相点(x, u, v)

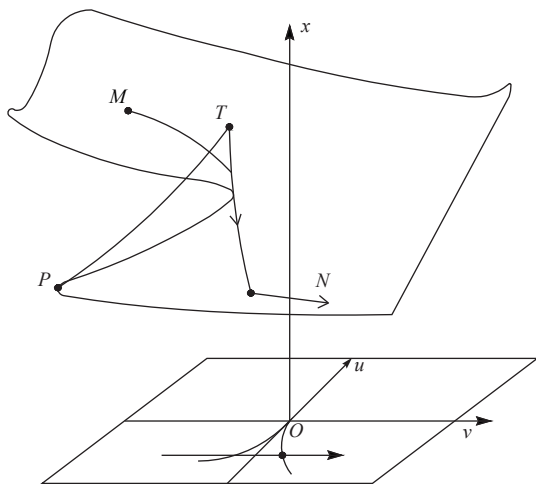


图 1 尖点突变的平衡曲面和分叉集

Fig. 1 Equilibrium surfaces and bifurcation sets of cusp catastrophe

的 x 值总是随着控制参数 u 、 v 的连续变化而平稳变化;仅当控制参数 u 、 v 越过曲面 $8u^3 + 27v^2 = 0$ 时, x 的值才发生突变:即相点在曲面的边缘上时,它必定跳跃到另一叶上;相点在曲面上半叶上连续地运动到 T 点时,将突跳至曲面的下半叶上,从而发生状态突变。

结合本文研究内容,系统的状态变量 x 为静载试验的桩顶荷载量,其物理意义为系统的作用力; u 、 v 分别为系统的主、次控制变量,与基桩受力类型的主次要因素有关,如按端承桩、摩擦桩来划分,则对于 u 、 v 来说,端承桩的 u 与桩端土性质有关,是主控因素, v 与桩侧土性质有关,是次要因素;而摩擦桩的 u 与桩侧土性质有关,是主控因素, v 与桩端土性质有关,是次要因素。

2 尖点突变模型求解方法

目前,利用尖点突变模型分析势函数稳定状态已有成熟的求解方法^[23-30]。但是,作者在研究过程中发现:这种求解方法存在不稳定性,从而提出直接拟合法,并从中发现一些新的原理。下面将目前常用的求解方法称为一般求解方法,将作者提出的新方法称为直接拟合法。

2.1 一般求解法

破坏状态下的基桩静载试验荷载-沉降曲线,包含基桩从加载初期的弹性阶段发展到弹塑性阶段、直至破坏阶段的完整过程。利用尖点突变理论评判静载试验的基桩受力性态的步骤为:以基桩静载试验的荷载-沉降曲线为基础,构建突变分析的变形函数;利用参数变换,将变形函数转变为尖点突变理论分析的标准形式;根据前述函数,求解突变参数及突变特征值,并以相应判据为基础,评价基桩静载试验的基桩受力性状,确定基桩极限承载力。根据上述步骤,将利用尖点突变理论评判基桩静载试验结果的计算分析过程介绍如下^[7-8,20]。

2.1.1 构建变形函数

根据大量研究和实践经验总结,岩土领域的变形函数多以四次多项式函数为主,可以利用 Matlab 软件的拟合工具箱构建静载试验的荷载-沉降曲线的四次多项式函数,即:

$$U_y = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 \quad (5)$$

式中: U_y ——静载试验曲线的桩顶位移函数;

a_i ——多项式系数, $i=0, 1, 2, 3, 4$;

y ——桩顶荷载。

2.1.2 桩顶位移函数的标准化变换

首先, 采用 Techirhaus 变换实现变形函数的标准化变换。在变换过程中, 先令 $A = a_3/4a_4$, $y = x - A$, 代入式(5), 可使位移函数转变为:

$$U_x = b_4x^4 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \quad (6)$$

式中: U_x ——静载试验曲线的桩顶位移函数;

b_j ——多项式系数, $j=0, 1, 2, 4$ 。

其中, a_i 和 b_i 存在如下关系:

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^4 & -A^3 & A^2 & -A & 1 \\ -4A^3 & 3A^2 & -2A & 1 & 0 \\ 6A^2 & -3A & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

其次, 在式(6)两侧同除以 b_4 , 得到尖点突变理论分析中位移函数的标准形式, 即:

$$U_x = x^4 + ux^2 + vx + c \quad (8)$$

2.1.3 受力性状评判

根据前述函数拟合及变换, 先对突变参数 u 和 v 进行求解, 公式如下:

$$u = \frac{a_2}{a_4} - \frac{3a_3^2}{8a_4^2} \quad (9)$$

$$v = \frac{a_1}{a_4} - \frac{a_2a_3}{2a_4^2} + \frac{a_3^3}{8a_4^3} \quad (10)$$

最后, 对位移函数的标准形式进行二次求导, 得到突变特征值 Δ 的求解公式为:

$$\Delta = 8u^3 + 27v^2 \quad (11)$$

以突变特征值 Δ 为评价指标, 可评判基桩静载试验的受力性状。判据为: 当 $\Delta > 0$ 时, 基桩处于稳定状态, 即基桩未达到破坏; 当 $\Delta < 0$ 时, 基桩处于不稳定状态, 即基桩已达到破坏。

2.2 直接拟合法

作者认为, 突变理论所对应的函数式有其特定的意义; 如果随意变换会使函数表达式失去其应有的实质含义。为此, 提出利用 Matlab 工具箱的强大拟合计算功能, 将基桩静载试验的桩顶荷载-沉降曲线直接拟合成尖点突变模型的标准型式:

$$U_x = a_4x^4 + a_2x^2 + a_1x \quad (12)$$

式(12)成功拟合的关键是尖点突变理论所反映的基桩受力性状势函数具有唯一性, 可表明基桩受荷加载破坏过程满足尖点突变理论所表达的实质内涵, 以曲线的拟合精度为标准进行判别, 当拟合精度大于 90% 时, 认为拟合精度较高, 满足要求。为求解式

(11), 假定 $a_4 < 0$ 和 $a_4 > 0$ 两种情形。

(1) 当式(12)中的 $a_4 < 0$ 时, 应评判基桩处于稳定状态, 即基桩未达到破坏状态; 但为验证假设的正确性, 将式(12)两边同乘以 -1 , 可得:

$$-U_x = (-a_4)x^4 + (-a_2)x^2 + (-a_1)x \quad (13)$$

这样, 式(9)(10)就变为:

$$\underline{u} = \frac{-a_2}{(-a_4)^{0.5}} \quad (14)$$

$$\underline{v} = \frac{-a_1}{(-a_4)^{0.25}} \quad (15)$$

$$\underline{\Delta} = 8\underline{u}^3 + 27\underline{v}^2 \quad (16)$$

如果以式(16)为判别公式, 当 $\underline{\Delta} < 0$, 则改变方向后的基桩处于不稳定状态, 即基桩已达到破坏, 说明原基桩处于稳定状态; 当 $\underline{\Delta} > 0$, 改变方向后的基桩仍然处于稳定状态, 原基桩处于超稳定状态。综上, 当式(12)中的 $a_4 < 0$ 时, 基桩处于稳定、超稳定状态。因此, 尖点突变理论中的势函数(四次幂函数)首项系数对系统稳定性具有决定作用(即首位性特征): 从 $a_4 < 0$ 发展到 $a_4 > 0$, 势函数稳定性状态从超稳定、稳定发展到不稳定。

(2) 当式(12)中的 $a_4 > 0$ 时, 进行变换 $a_4x^4 = x_1^4$, 则式(12)变为:

$$U_{x_1} = x_1^4 + a_2a_4^{-0.5}x_1^2 + a_1a_4^{-0.25}x_1 \quad (17)$$

这样, 式(9)(10)就变为:

$$u = \frac{a_2}{a_4^{0.5}} \quad (18)$$

$$v = \frac{a_1}{a_4^{0.25}} \quad (19)$$

后面的评判与一般方法完全相同。以式(11)为判别公式: 当 $\Delta > 0$ 时, 基桩处于稳定状态, 即基桩未达到破坏; 当 $\Delta < 0$ 时, 基桩处于不稳定状态, 即基桩已达到破坏。而且, 一旦基桩达到破坏状态, 其失稳状态随着发展而持续, 即: 当后续变形逐级增大, 则其破坏状态是持续的; 如果后续变形相对前一级变小, 则其发展状态又变为稳定。利用尖点突变理论评判基桩受力性状具有单调性。

由此可见, 通过直接拟合法所得到的尖点突变理论势函数具有三个鲜明特征: 唯一性、首位性、单调性。

2.3 曲线拟合精度的检验

为量化曲线拟合精度, 采用确定系数 R^2 , 它表示拟合曲线对观测值的拟合程度, 最大值是 1; R^2 越接近 1, 拟合程度越好; 反之, 拟合程度越差。本文假定

R^2 大于 0.9 时, 拟合程度为高。

假定 y 为待拟合数值, 其均值为 $\bar{y}$, 拟合值为 $\hat{y}$, 有:

总平方和 $SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$, 回归平方和 $SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$, 残差平方和 $SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 。

记 $SST = SSR + SSE$ 。则确定系数为:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (20)$$

3 实例验证

3.1 3 个试验样本

检验评判依据好坏的重要标准是工程实例验证与对比分析。为研究采用“尖点突变理论”应用于基桩静载试验的适应性, 这里选择 3 个典型的基桩静载试验样本: 样本 1——基桩在终级荷载下未破坏; 样本 2——基桩在最后一级荷载下发生破坏; 样本 3——基桩在倒数第三级荷载下发生破坏, 且变形量持续发展。下面通过这 3 个试验样本的检验, 对比分析上述 2 种计算方法评判结果与工程实际静载试验结果的相符性, 说明采用尖点突变理论分析基桩静载试验荷载-

沉降曲线的计算过程。

样本 1: 基桩为桩长 64 m、桩径 850 mm 的钻孔灌注桩, 桩端持力层为上海市川沙地区第⑨₁₁ 灰色粉砂层。静载荷试验采用锚桩慢速法。试桩成果如图 2 和表 1 所示。根据检测报告, 当累计荷载加至 8 550 kN 时, 桩顶累计最大沉降量为 20.11 mm, 本级沉降量为 3.69 mm。因达到了预定的最大加载值, 终止试验, 回弹曲线的回弹率为 54.4%。据此, 检测报告认为试桩未达到破坏, 基桩极限承载力大于本次试验最大加载值 8 550 kN。

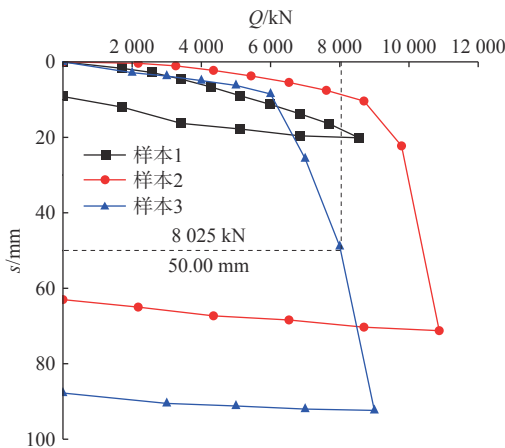


图 2 3 个样本的试桩 Q - s 曲线
Fig. 2 Q - s curves of three samples by static load test

表 1 3 个样本试桩 Q - s 曲线数据
Table 1 Q - s curve data of three samples by static load test

物理量	样本1			样本2			样本3		
	Q/kN	本级沉降/mm	s/mm	Q/kN	本级沉降/mm	s/mm	Q/kN	本级沉降/mm	s/mm
试验结果	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1 710	1.72	1.72	2 175	0.39	0.39	2 000	2.85	2.85
	2 565	1.08	2.80	3 262	0.68	1.07	3 000	0.91	3.76
	3 420	1.78	4.56	4 350	1.20	2.27	4 000	1.19	4.95
	4 275	2.07	6.65	5 437	1.46	3.73	5 000	1.28	6.23
	5 130	2.36	9.01	6 523	1.71	5.44	6 000	2.28	8.51
	5 985	2.34	11.25	7 612	2.10	7.54	7 000	17.15	25.66
	6 840	2.50	13.75	8 699	2.85	10.39	8 000	23.25	48.91
	7 695	2.67	16.42	9 787	11.89	22.28	9 000	43.45	92.36
	8 550	3.69	20.11	10 874	48.96	71.24			

样本 2: 基桩为桩长 61 m、桩径 1 000 mm 的钻孔灌注桩, 桩端持力层为浙江嘉兴地区硬塑黏土层。静载荷试验采用锚桩慢速法。试桩成果如图 2 和表 1 所示。根据检测报告, 当累计荷载加至 10 874 kN 时, 桩顶累计最大沉降量为 71.24 mm, 本级沉降量为 48.96 mm, 未达到上级沉降量 11.89 mm 的 5 倍; 在整个加载过程

中, Q - s 曲线为缓变形曲线, 但卸荷回弹率仅仅为 11.6%。根据《建筑基桩检测技术规范》(JGJ 106—2014)^[6] 判定, 对于缓变形 Q - s 曲线, 对桩端直径 (D) 大于或等于 800 mm 的桩, 可取 s 等于 $0.05D$ 对应的荷载值。据此, 桩基检测单位认为该基桩的竖向承载力极限值为 10 402 kN。

样本 3: 基桩为桩长 55 m、桩径 1 000 mm 的钻孔灌注桩, 桩端持力层为浙江嘉兴地区硬塑黏土层。静载试验采用锚桩慢速法。试桩成果如图 2 和表 1 所示。根据试桩检测报告, 当累计荷载加至 7 000 kN 时, 桩顶累计最大沉降量为 25.66 mm, 本级沉降量为 17.15 mm, 已超过上级沉降量 2.28 mm 的 5 倍, 但桩顶沉降量小于 40 mm 仍可继续加载; 当累计荷载加至 8 000 kN 时, 桩顶累计最大沉降量为 48.91 mm, 本级沉降量为 23.25 mm; 当累计荷载加至 9 000 kN 时, 桩顶累计最大沉降量为 92.36 mm, 本级沉降量为 43.45 mm, 在本级荷载维持时间内桩顶沉降量持续增大, 同时本级荷载无法维持导致试验无法继续而终止试验; 卸荷时基桩回弹率几乎为 0。根据《建筑基桩检测技术规

范》(JGJ 106—2014)^[6]判定, 对 D 大于或等于 800 mm 的桩, 可取 s 等于 $0.05D$ 对应的荷载值。据此, 桩基检测单位认为该基桩的竖向承载力极限值为 8 025 kN。

3.2 计算过程

因基于尖点突变理论评判基桩受力性状是根据静载试验的 Q - s 曲线分析研究的, 为计算需要, 桩顶沉降 (s) 采用 mm 单位, 桩顶荷载 (Q) 采用 1 000 kN 单位, 以 s 为因变量、 Q 为自变量拟合的静载试验 Q - s 曲线作为势函数。

3.2.1 一般求解法

根据前述计算方法与步骤, 自第六级荷载开始计算。3 个样本的计算结果如表 2 所示。

表 2 3 个样本的一般求解法计算结果
Table 2 Calculation results of three samples by the widely used method

样本号	累计荷载级数	a_1	a_2	a_3	a_4	u	v	Δ
样本1	第六级	1.345 4	-0.516 0	0.214 6	-0.019 2	-20.00	-94.55	1.178×10^5
	第七级	1.182 2	-0.353 2	0.164 6	-0.014 4	-24.50	-128.79	3.301×10^6
	第八级	0.725 2	0.056 1	0.052 7	-0.004 9	-54.60	-363.29	2.261×10^6
	第九级	0.486 9	0.273 1	$-5.260\ 0\times10^{-4}$	$-8.800\ 0\times10^{-4}$	-310.62	-426.44	-2.350×10^8
	第十级	0.047 0	0.573 8	-0.067 4	0.003 7	30.58	670.48	1.237×10^7
样本2	第六级	0.001 4	0.012 1	0.037 7	-0.003 1	-60.57	-256.58	6.400×10^2
	第七级	-0.213 4	0.180 6	-0.003 0	$3.037\ 0\times10^{-6}$	-3.07×10^5	-9.13×10^7	-5.740×10^{15}
	第八级	-0.401 5	0.313 0	-0.031 5	0.001 9	61.98	586.23	1.120×10^7
	第九级	-2.869 1	1.882 0	-0.334 3	0.019 9	-11.03	58.28	8.098×10^4
	第十级	-10.830 0	6.473 6	-1.137 1	0.063 1	-19.12	21.48	-4.347×10^4
样本3	第六级	1.792 3	-0.203 7	-0.002 2	0.004 3	-47.59	405.60	3.580×10^6
	第七级	-4.565 3	5.218 7	-1.426 6	0.121 2	-8.91	11.87	-1.854×10^3
	第八级	1.008 8	0.950 3	-0.429 4	0.048 9	-9.46	21.35	5.535×10^3
	第九级	1.540 9	0.582 4	-0.352 2	0.043 9	-10.85	23.80	5.091×10^3

从表 2 可以看出, 样本 1 的第九级荷载所评判的结果(基桩已失稳)与静载试验基桩未发生破坏的结果不符, 第十级荷载所评判结果未发生破坏, 这与静载试验结果相符, 说明一般求解法在计算过程中存在不稳定性; 在第九级荷载下基桩发生沉降 2.67 mm, 相比第八级荷载下基桩发生 2.50 mm 沉降仅仅增加 0.17 mm, 说明在第九级荷载下基桩不可能发生破坏。

样本 2 自第七级荷载下基桩沉降发生突变失稳, 与该桩静载试验不相符, 实际情况是在第七级荷载下基桩发生 2.10 mm 沉降, 相比第六级荷载下基桩发生 1.71 mm 沉降仅仅增加 0.39 mm, 说明在第七级荷载下基桩不可能发生破坏。检测报告认为, 静载试验时基桩在加载到第十级荷载时仍未发生破坏, 只是发生较大沉降, 但第十级荷载下的沉降量仍未达到前一级荷

载的 5 倍沉降量, 可以根据《建筑基桩检测技术规范》(JGJ 106—2014)^[6]按大直径基桩的 $0.05D$ 沉降量为限值来确定基桩极限荷载, 这与一般求解法得到的已发生破坏计算结果不相符。

样本 3 在第七级荷载下基桩发生破坏失稳, 而第八级、九级荷载下沉降仍在继续扩大、反而又稳定了, 显然不符合常理, 与突变理论相悖, 导致基桩极限荷载难以确定。

将按一般求解法计算结果所评判的基桩稳定性状态汇总, 如图 3(a)所示。对比 3 根基桩静载试验结果可知, 利用一般求解法所计算的 3 个样本计算结果与工程实际情况均不相符。

需要说明的是, 为表达方便, 图 3 中横坐标为静载试验加载级数, 纵坐标为 $\pm\lg(\pm\Delta)$, 当 $a_4<0$ 时, 取 $\Delta=\underline{\Delta}$ 。

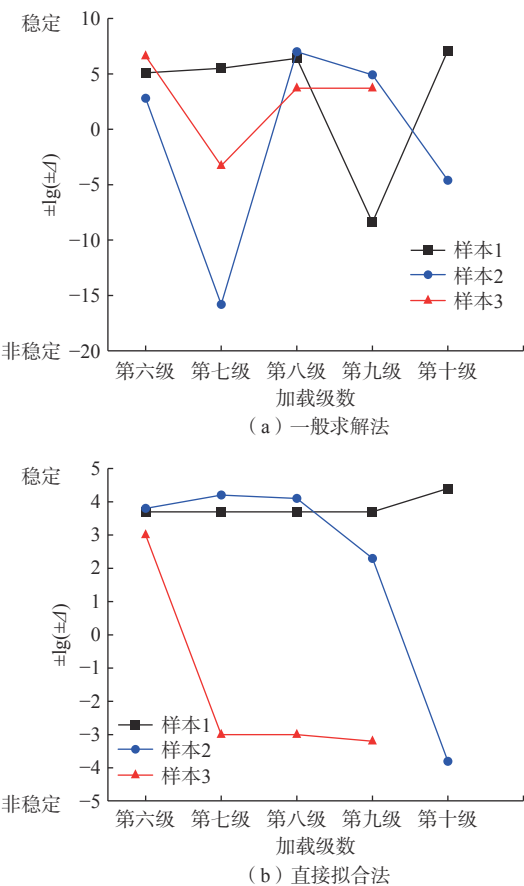


图 3 2 种计算方法的评判结果

Fig. 3 Evaluation results of two calculation methods

注: $\Delta > 0$ 时, 纵轴标目为 $\lg \Delta$; $\Delta < 0$ 时, 纵轴标目为 $-\lg(-\Delta)$ 。

3.2.2 直接拟合法

直接拟合法的计算公式为式(12)—(19)。当 $a_4 < 0$

时, 依据式(13)—(16)计算 u 、 v 、 Δ , 从而验证直接拟合法的首位性。

从表 3 可以看出: 3 个样本在六级以上荷载作用下, 直接拟合的势函数拟合精度均大于 90%, 满足唯一性拟合精度要求。

样本 1 从第六级到第十级荷载所评判的结果与静载荷试验相符, 本桩加载到第十级荷载时仍未发生破坏; 基桩在每级荷载下的沉降速率和累计沉降量均未达到《建筑基桩检测技术规范》(JGJ 106—2014)^[6] 所要求的破坏条件, 基桩处于超稳定状态。

样本 2 的基桩只在第十级荷载下发生沉降突变失稳, 这与该桩现场静载试验结果相符; 本桩在加载到第十级荷载时才发生破坏, 这也为基桩卸荷回弹率仅为 11.6% 所证实。本桩稳定状态由超稳定到稳定、再转变为失稳。检测报告根据第十级荷载下沉降未达到前一级荷载沉降量的 5 倍, 因基桩直径大于 800 mm, 根据《建筑基桩检测技术规范》(JGJ 106—2014)^[6] 按 $0.05D$ (50 mm) 为限值来确定基桩极限荷载, 判定为 10 402 kN。根据突变理论的尖点突变模型, 这个评判结果有待商榷, 应判定为前一级荷载值, 即 9 787 kN, 两者相差 615 kN, 突变理论计算结果更为安全。

样本 3 的基桩自第七级荷载发生破坏后, 到第九级荷载, 一直处于破坏失稳状态; 沉降量逐级增大, 依次为 17.15, 23.25, 43.45 mm, 反映基桩不稳定状态发展的单调性, 直接拟合法的计算结果与基桩受力性状相符, 基桩卸荷回弹率几乎为 0, 说明桩端持力层强度

表 3 3 个样本的直接拟合法计算结果

Table 3 Calculation results of three samples by the direct fitting method

样本号	累计荷载级数	a_1	a_2	a_4	u ($\underline{u}$)	v ($\underline{v}$)	Δ ($\underline{\Delta}$)	R^2
样本1	第六级	0.580 7	0.213 9	0.000 6	8.660 0	3.690 0	5.56×10^3	0.999 5
	第七级	0.429 8	0.284 5	-0.001 1	<u>-8.420 0</u>	<u>-2.340 0</u>	<u>-4.63 \times 10^3</u>	0.999 4
	第八级	0.429 7	0.284 5	-0.001 1	<u>-8.420 0</u>	<u>-2.340 0</u>	<u>-4.62 \times 10^3</u>	0.999 6
	第九级	0.472 7	0.268 6	-0.000 9	<u>-8.950 0</u>	<u>-2.730 0</u>	<u>-5.53 \times 10^3</u>	0.999 7
	第十级	0.642 8	0.211 4	-0.000 2	<u>-15.040 0</u>	<u>-5.420 0</u>	<u>-2.64 \times 10^4</u>	0.999 2
样本2	第六级	-0.215 8	0.175 2	-0.000 3	<u>-9.602 2</u>	<u>1.597 5</u>	-7.01×10^3	0.999 8
	第七级	-0.189 6	0.165 6	-0.000 2	<u>-12.162 9</u>	<u>1.625 3</u>	-1.43×10^4	0.999 9
	第八级	-0.106 0	0.138 3	0.000 1	11.829 2	-0.979 8	1.33×10^4	0.999 6
	第九级	0.991 0	-0.181 8	0.003 1	-3.246 5	4.187 7	2.00×10^2	0.972 9
	第十级	5.074 0	-0.126 02	0.011 3	-11.835 4	15.549 6	-6.74×10^3	0.938 5
样本3	第六级	1.804 6	-0.212 8	0.004 1	-3.317 1	7.124 7	1.08×10^3	0.999 7
	第七级	4.413 1	-1.256 0	0.023	-8.272 6	11.325 9	-1.07×10^3	0.969 5
	第八级	4.345 1	-1.231 9	0.022 7	-8.173 8	11.192 4	-9.88×10^2	0.993 2
	第九级	4.888 5	-1.404 3	0.024 6	-8.949 4	12.340 6	-1.62×10^3	0.998 0

注: 带下划线的计算结果为带下划线字母计算值。

较差, 基桩卸荷时已经发生破坏。试桩检测报告根据累计荷载加至 7 000 kN 时本级沉降量为 17.15 mm (已超过上级沉降量 2.28 mm 的 5 倍)、但桩顶累计沉降量未达到 40 mm 来判定基桩未达到破坏状态; 根据《建筑基桩检测技术规范》(JGJ 106—2014)^[6], 对 D 大于或等于 800 mm 的桩, 取 s 等于 $0.05D$ (50 mm) 对应的荷载值作为基桩极限承载力, 桩基检测单位据此认为该基桩的竖向承载力极限值为 8 025 kN。检测单位的评判结论虽然是依据基桩检测规范确定的, 但与基桩静载试验情形不相符, 也与突变理论评判结论相冲突, 本基桩的极限承载力宜确定为 6 000 kN。尖点突变理论模型既给出科学的评判结论, 又有合理的理论依据; 相比基桩检测规范判定法, 直接拟合法评判结果更合理、更偏于安全。

直接拟合法计算结果所评判的基桩稳定性状态汇总如图 3(b) 所示。对比 3 根基桩静载试验结果可知, 直接拟合法的计算结果与工程实际情况均相符, 可大大改进一般求解法计算结果的准确性。

4 结论与建议

本文提出利用尖点突变模型确定基桩静载试验的极限承载力, 对比目前常用一般求解法和本文直接拟合法的计算结果, 得到如下结论:

(1) 直接拟合法计算结果表明, 利用尖点突变理论评判基桩静载试验荷载-沉降曲线的稳定状态显示出突变理论势函数的唯一性、首位性和单调性。

(2) 一般求解法计算结果与基桩静载试验的实际情况不相符, 存在误判、不稳定等不足。

(3) 直接拟合法计算结果与基桩静载试验的实际情况相符, 比现行基桩检测规范计算结果更为安全, 为较大直径基桩在缓变形情形下, 以 $0.05D$ 桩顶沉降量为标准确定基桩极限承载力提供了理论依据。

参考文献 (References):

- [1] 崔树琴, 张远芳, 李传斌, 等. 突变理论在单桩竖向承载力确定中的应用 [J]. 水利与建筑工程学报, 2006, 4(2): 19 - 22. [CUI Shuqin, ZHANG Yuanfang, LI Chuanbin, et al. Application of catastrophe theory in ascertainment of vertical bearing capacity of single pile[J]. Journal of Water Resources and Architectural Engineering, 2006, 4(2): 19 - 22. (in Chinese with English abstract)]
- [2] 苏亮, 时伟, 水伟厚, 等. 高能级强夯法处理深厚吹填

砂土地基现场试验 [J]. 吉林大学学报(地球科学版), 2021, 51(5): 1560 - 1569. [SU Liang, SHI Wei, SHUI Weihou, et al. Field test of high energy dynamic compaction on hydraulic sandy filling[J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2021, 51(5): 1560 - 1569. (in Chinese with English abstract)]

- [3] 陈继彬, 李雪梅, 罗益斌, 等. 侏罗系中等风化泥岩地基承载力试验研究 [J]. 水文地质工程地质, 2023, 50(2): 103 - 111. [CHEN Jibin, LI Xuemei, LUO Yibin, et al. A study of bearing capacity of the Jurassic moderately-weathered mudstone foundation[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2023, 50(2): 103 - 111. (in Chinese with English abstract)]
- [4] 张玲, 陈金海, 欧强. 基于能量法的轴横向荷载作用下单桩受力变形分析 [J]. 水文地质工程地质, 2020, 47(5): 81 - 91. [ZHANG Ling, CHEN Jinhai, OU Qiang. Deformation analysis of pile under combined axial and lateral loads by using the energy method[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2020, 47(5): 81 - 91. (in Chinese with English abstract)]
- [5] 陈飞宇, 董利飞, 王苗, 等. 基于灰色马尔科夫模型的地基承载力预测 [J]. 地质科技通报, 2022, 41(3): 222 - 227. [CHEN Feiyu, DONG Lifei, WANG Miao, et al. Prediction of foundation bearing capacity based on grey Markov model[J]. Bulletin of Geological Science and Technology, 2022, 41(3): 222 - 227. (in Chinese with English abstract)]
- [6] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑基桩检测技术规范: JGJ 106—2014[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014. [Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China. Technical code for testing of building foundation piles: JGJ 106—2014[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2014. (in Chinese)]
- [7] 凌复华. 突变理论及其应用 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1987. [LING Fuhua. Catastrophe theory and its application[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1987. (in Chinese)]
- [8] ARNOLD V I. 突变理论 [M]. 周燕华, 译(trans). 北京: 高等教育出版社, 1990. [ARNOLD V I. Catastrophe theory [M]. ZHOU Yanhua, trans. Beijing: Higher Education Press, 1990. (in Chinese)]
- [9] 王新泉, 陈永辉, 刘汉龙. 基于尖点突变理论的基桩极限承载力判定及预测 [J]. 河海大学学报(自然科学版), 2008, 36(2): 248 - 252. [WANG Xinquan, CHEN Yonghui, LIU Hanlong. Determining and

- forecasting ultimate bearing capacity of pile based on cusp catastrophe theory[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2008, 36(2): 248 – 252. (in Chinese with English abstract)]
- [10] 张远芳, 崔树琴. 基于尖点突变理论的端承桩竖向承载力分析 [J]. 岩土力学, 2007, 28(增刊 1): 901 – 904. [ZHANG Yuanfang, CUI Shuqin. Vertical bearing capacity analysis of end-bearing piles based on cusp catastrophe theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2007, 28(Sup 1): 901 – 904. (in Chinese with English abstract)]
- [11] 贺广零. 突变理论新解及其在桩基工程中的应用 [J]. 工程力学, 2009, 26(9): 126 – 130. [HE Guangling. New catastrophe theory & its application in pile foundation engineering[J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(9): 126 – 130. (in Chinese with English abstract)]
- [12] 聂珊利, 张远芳, 赵秀亮. 基于尖点突变理论的摩擦桩竖向承载力分析 [J]. 新疆农业大学学报, 2010, 33(3): 264 – 267. [NIE Shanli, ZHANG Yuanfang, ZHAO Xiuliang. An analysis on vertical bearing capacity of friction pile based on cuspidal catastrophe theory[J]. *Journal of Xinjiang Agricultural University*, 2010, 33(3): 264 – 267. (in Chinese with English abstract)]
- [13] 姚文娟, 钟倩倩, 郭志兴, 等. 超长桩竖向极限承载力预测与动力稳定性分析 [J]. 力学季刊, 2011, 32(4): 531 – 538. [YAO Wenjuan, ZHONG Qianqian, GUO Zhixing, et al. Prediction of vertical ultimate bearing capacity and dynamic stability analysis of super-long pile[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2011, 32(4): 531 – 538. (in Chinese with English abstract)]
- [14] 姚文娟, 郭志兴, 程泽坤. 基于突变理论的超长桩横向动力稳定性分析 [J]. 水运工程, 2011(8): 9 – 13. [YAO Wenjuan, GUO Zhixing, CHENG Zekun. Lateral dynamic stability analysis of super-long piles based on catastrophe theory[J]. *Port & Waterway Engineering*, 2011(8): 9 – 13. (in Chinese with English abstract)]
- [15] 董天文, 郑颖人, 唐晓松. 强度折减法判定桩基础极限荷载的尖点突变条件 [J]. 西南交通大学学报, 2014, 49(3): 373 – 378. [DONG Tianwen, ZHENG Yingren, TANG Xiaosong. Cusp point condition for estimating ultimate load of pile foundation based on strength reduction method[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2014, 49(3): 373 – 378. (in Chinese with English abstract)]
- [16] 解志, 董天文, 谢鹏, 等. 超长桩基础极限荷载判定的比能对比法 [J]. 地下空间与工程学报, 2021, 17(2): 496 – 502. [XIE Zhi, DONG Tianwen, XIE Peng, et al. Correlation method of specific energy to estimating the ultimate load of super-long pile[J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2021, 17(2): 496 – 502. (in Chinese with English abstract)]
- [17] 刘建飞, 高超, 周永明. 突变理论与比能对比法推定既有基桩极限承载力的方法与应用 [J]. 岩土工程技术, 2023, 37(4): 403 – 407. [LIU Jianfei, GAO Chao, ZHOU Yongming. Method and application of determining ultimate bearing capacity of existing piles based on catastrophe theory and specific energy comparison method[J]. *Geotechnical Engineering Technique*, 2023, 37(4): 403 – 407. (in Chinese with English abstract)]
- [18] 张伟, 田新然. 基于突变理论的筒形基础竖向承载力研究 [J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2021, 54(7): 704 – 710. [ZHANG Wei, TIAN Xinran. Research on vertical bearing capacity of bucket foundation based on catastrophe theory[J]. *Journal of Tianjin University (Science and Technology)*, 2021, 54(7): 704 – 710. (in Chinese with English abstract)]
- [19] 童华炜, 周龙翔, 钟声. 基坑土钉支护的突变分析 [J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2007, 39(4): 485 – 491. [TONG Huawei, ZHOU Longxiang, ZHONG Sheng. Catastrophe analysis of soil nailing support in foundation pit[J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2007, 39(4): 485 – 491. (in Chinese with English abstract)]
- [20] 薛晓辉, 刘铁骊, 周亦涛. 基于尖点突变理论和 R/S 分析的基坑安全性评价及事故处理措施研究 [J]. 工程勘察, 2022, 50(7): 15 – 21. [XUE Xiaohui, LIU Tiel, ZHOU Yitao. Safety evaluation and accident remedy of excavation pit based on cusp catastrophe theory and R/S analysis[J]. *Geotechnical Investigation & Surveying*, 2022, 50(7): 15 – 21. (in Chinese with English abstract)]
- [21] 梁冠亭, 肖开乾, 郑宏伟, 等. 基于尖点突变理论的岩溶区嵌岩桩溶洞顶板安全厚度研究 [J]. 水文地质工程地质, 2018, 45(5): 67 – 72. [LIANG Guanting, XIAO Kaiqian, ZHENG Hongwei, et al. A study of the safety thickness of cave roof under rock-socketed pile in Karst Area based on the cusp catastrophe theory[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2018, 45(5): 67 – 72. (in Chinese with English abstract)]
- [22] 龚先兵, 赵明华, 杨明辉, 等. 岩溶区桥梁基桩极限

- 承载力的突变求解方法[J]. *公路交通科技*, 2012, 29(11): 53 – 57. [GONG Xianbing, ZHAO Minghua, YANG Minghui, et al. Determination of ultimate bearing capacity of pile in Karst Region based on catastrophe theory[J]. *Journal of Highway and Transportation Research and Development*, 2012, 29(11): 53 – 57. (in Chinese with English abstract)]
- [23] 娄一青, 顾冲时, 李君. 基于突变理论的有限元强度折减法边坡失稳判据探讨[J]. *西安建筑科技大学学报(自然科学版)*, 2008, 40(3): 361 – 367. [LOU Yiqing, GU Chongshi, LI Jun. Study on the slope failure criterion in strength reduction finite element method based on catastrophe theory[J]. *Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition)*, 2008, 40(3): 361 – 367. (in Chinese with English abstract)]
- [24] 夏开宗, 刘秀敏, 陈从新, 等. 考虑突变理论的顺层岩质边坡失稳研究[J]. *岩土力学*, 2015, 36(2): 477 – 486. [XIA Kaizong, LIU Xiumin, CHEN Congxin, et al. Analysis of mechanism of bedding rock slope instability with catastrophe theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(2): 477 – 486. (in Chinese with English abstract)]
- [25] 岳建伟, 杨光辉, 王思远, 等. 基于弹性滑体的边坡失稳尖点突变模型研究[J]. *河南大学学报(自然科学版)*, 2019, 49(3): 354 – 361. [YUE Jianwei, YANG Guanghui, WANG Siyuan, et al. Cusp catastrophe model for slope failure based on elastic slip mass[J]. *Journal of Henan University (Natural Science)*, 2019, 49(3): 354 – 361. (in Chinese with English abstract)]
- [26] 方汕澳, 许强, 修德皓, 等. 基于斜率模型的突发型黄土滑坡失稳时间预测[J]. *水文地质工程地质*, 2021, 48(4): 169 – 179. [FANG Shan'ao, XU Qiang, XIU Dehao, et al. A study of the predicted instability time of sudden loess landslides based on the SLO model[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2021, 48(4): 169 – 179. (in Chinese with English abstract)]
- [27] 李彬, 周金喜, 吴钊桥, 等. 基于突变理论的湟水河流域崩滑易发性评价[J]. *中国地质灾害与防治学报*, 2023, 34(6): 116 – 126. [LI Bin, ZHOU Jinxi, WU Keqiao, et al. Assessment of landslide susceptibility in the Huangshui River Basin based on catastrophe theory[J]. *The Chinese Journal of Geological Hazard and Control*, 2023, 34(6): 116 – 126. (in Chinese with English abstract)]
- [28] 于开宁, 吴涛, 魏爱华, 等. 基于 AHP-突变理论组合模型的地质灾害危险性评价——以河北平山县为例[J]. *中国地质灾害与防治学报*, 2023, 34(2): 146 – 155. [YU Kaining, WU Tao, WEI Aihua, et al. Geological hazard assessment based on the models of AHP, catastrophe theory and their combination: A case study in Pingshan County of Hebei Province[J]. *The Chinese Journal of Geological Hazard and Control*, 2023, 34(2): 146 – 155. (in Chinese with English abstract)]
- [29] 徐海清, 陈亮, 王伟, 等. 软岩隧道围岩塌方的尖点突变预测分析[J]. *铁道工程学报*, 2016, 33(11): 97 – 101. [XU Haiqing, CHEN Liang, WANG Wei, et al. Prediction analysis of surrounding rock collapse in soft rock tunnel by cusp catastrophe[J]. *Journal of Railway Engineering Society*, 2016, 33(11): 97 – 101. (in Chinese with English abstract)]
- [30] 赵延林, 吴启红, 王卫军, 等. 基于突变理论的采空区重叠顶板稳定性强度折减法及应用[J]. *岩石力学与工程学报*, 2010, 29(7): 1424 – 1434. [ZHAO Yanlin, WU Qihong, WANG Weijun, et al. Strength reduction method to study stability of goaf overlapping roof based on catastrophe theory[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2010, 29(7): 1424 – 1434. (in Chinese with English abstract)]

编辑: 刘真真